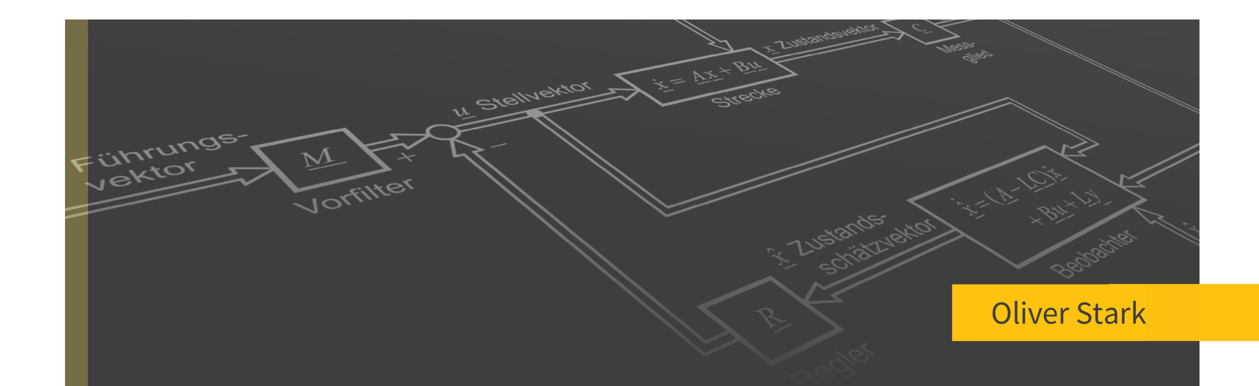
15

KARLSRUHER BEITRÄGE ZUR REGELUNGS-
UND STEUERUNGSTECHNIK



Oliver Stark

Parameter- und Ordnungsidentifikation von fraktionalen Systemen mit einer Anwendung auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle



Oliver Stark

Parameter- und Ordnungsidentifikation von fraktionalen Systemen mit einer Anwendung auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle

Karlsruher Beiträge zur
Regelungs- und Steuerungstechnik
Karlsruher Institut für Technologie

Band 15

Parameter- und Ordnungsidentifikation von fraktionalen Systemen mit einer Anwendung auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle

von
Oliver Stark



Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Parameter- und Ordnungsidentifikation von fraktionalen Systemen
mit einer Anwendung auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
von der KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) genehmigte Dissertation

von Oliver Stark, M.Sc.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. November 2021
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

www.ksp.kit.edu

Print on Demand 2022 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2511-6312
ISBN 978-3-7315-1187-8
DOI 10.5445/KSP/1000145599

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Die Arbeit wurde gefördert durch die Deutsche Forschungsgesellschaft – HO 4738/1-1 und HO 4738/1-2.

Der erste Dank gilt meinem Hauptreferenten und Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann für den nötigen Freiraum für eine erfolgreiche wissenschaftliche Arbeit und die fortwährende Unterstützung durch intensive fachliche Diskussionen. Die Gespräche haben in jeder Phase der Arbeit einen wertvollen Beitrag zu dieser Arbeit geliefert. Den zweiten Dank richte ich an Herrn Prof. Dr.-Ing. Johann Reger für die Übernahme des Korreferats und das Interesse an meiner Arbeit.

Weiterhin möchte ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen des IRSs für die fachliche Unterstützung, sehr abwechslungsreichen Gespräche und kollegiale Zusammenarbeit bedanken. Ein besonderer Dank gilt Martin Kupper und Philipp Karg für die kritische Durchsicht und konstruktive Kritik der frühen Version dieser Arbeit. In diesem Zusammenhang danke ich auch meinem Freund und ehemaligen Studienkollegen Tobias Weinkamm, der mir ebenfalls wertvolle Rückmeldungen zum Gelingen dieser Arbeit gegeben hat. Auch an Mathias Kluwe richte ich einen expliziten Dank für das stets offene Ohr und die vielen fachlichen und persönlichen Gespräche. Genauso spreche ich einen besonderen Dank Kaori Nagato-Plum aus, die vor allem bei mathematischen Problemen mir sehr wertvolle Impulse geliefert hat.

Außerdem bedanke ich mich bei den Studierenden, die im Rahmen ihrer Abschlussarbeiten oder als wissenschaftliche Hilfskraft wertvolle Beiträge zu dieser Arbeit geliefert haben.

Bei meiner Familie bedanke ich mich vom ganzen Herzen für die stetige und unermüdliche Unterstützung auf dem gesamten Weg. Den letzten Dank richte ich an Paula Kallenbach insbesondere dafür, dass du mir in den anstrengenden Phasen sehr viel Verständnis gegenüber aufgebracht, zu jeder Zeit die nötige Unterstützung gegeben und den Rücken freigehalten hast.

Karlsruhe, im September 2021

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. Mathematische Theorien über die Wirklichkeit sind immer ungesichert - wenn sie gesichert sind, handelt es sich nicht um die Wirklichkeit.

Albert Einstein

Kurzfassung

Für einen sicheren und effizienten Betrieb von Batteriezellen werden zunehmend modellbasierte Methoden eingesetzt. Zur Modellierung der Batteriezellen haben sich fraktionale Modelle, die durch nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen gekennzeichnet sind, als Beschreibungsform etabliert. Zum einen bilden fraktionale Modelle sehr gut das Diffusionsverhalten von Batteriezellen ab. Zum anderen lassen sich die Parameter und Ableitungsordnungen eines fraktionalen Modells elektrochemisch interpretieren und Rückschlüsse auf den Zustand der Batteriezelle ziehen. Um während der Batterienutzung den Zustand der Batteriezelle beurteilen zu können, ist eine fortlaufende Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Modells notwendig. In der Arbeit werden Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation fraktionaler Systeme präsentiert, die keine Einschränkung bezüglich des Anregungszustands der Batterie zu Beginn der Identifikation treffen und die auch bei verrauschten Ausgangssignal die gesuchten Größen fehlerfrei identifizieren.

Für die Parameteridentifikation wird ein Verfahren basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren hergeleitet, wobei die Methode der Hilfsvariablen anstelle der Methode der kleinsten Quadrate eingesetzt wird. Auf dem Parameteridentifikationsverfahren aufbauend wird auch ein optimierungsbasiertes Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation beschrieben. Ein zweites optimierungsbasiertes Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation basiert auf dem Vergleich des verrauschten Ausgangssignals und eines simulierten Ausgangssignals. Eine gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird durch die Kombination des Parameteridentifikationsverfahrens mit dem Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation erzielt.

Beide Kombinationen der hergeleiteten Verfahren werden erfolgreich zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation eines fraktionalen Modells einer Batteriezelle eingesetzt. Dadurch dass die Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Modells elektrochemisch interpretierbar sind, lassen sich damit während der Batterienutzung Rückschlüsse auf den Batteriezustand ziehen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort I

Kurzfassung III

Abbildungsverzeichnis IX

Tabellenverzeichnis XI

Abkürzungen und Symbole XIII

1 Einleitung 1

2 Einführung und Stand der Wissenschaft 5

2.1 Einführung: Fraktionales Modell einer Batteriezelle 5

2.1.1 Aufbau, Funktionsweise und Verlustprozesse einer Lithium-Ionen-Batteriezelle 5

2.1.2 Diffusionsimpedanz elektrochemischer Systeme und die Approximation mittels fraktionaler Modelle 8

2.1.3 Fraktionales Impedanzmodell einer Lithium-Ionen-Batteriezelle 11

2.2 Methoden zur Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen fraktionaler Systemen 14

2.2.1 Parameteridentifikation 14

2.2.2 Ableitungsordnungsidentifikation 19

2.3 Bewertung des Stands der Wissenschaft und Spezifizierung der Forschungslücke 23

3 Methodische Grundlagen und Notation 27

3.1 Fraktionale Analysis 27

3.1.1 Fraktionale Integration 27

3.1.2 Fraktionale Differentiation 28

3.1.3 Initialisierung der fraktionalen Operatoren für Funktionen 32

3.1.4 Short-Memory-Prinzip für Funktionen 34

3.1.5 Fraktionale partielle Integration 35

3.1.6 Partielle Ableitungen des fraktionalen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov 37

3.2 Fraktionale Systemdarstellung 38
3.2.1 Fraktionale Übertragungsfunktion 38
3.2.2 Fraktionale Differentialgleichung 39
3.2.3 Geschlossene Lösung für fraktionale Differentialgleichungen 41
3.3 Modulationsfunktionsverfahren 42
3.3.1 Modulationsfunktion 42
3.3.2 Parameteridentifikation mit Hilfe des Modulationsfunktionsverfahrens . . 43
3.3.3 Parameteridentifikation bei verrauschtem Ausgangssignal 46

4 Parameteridentifikation für initialisierte fraktionale Systeme 49
4.1 Modulationsfunktionsverfahren für initialisierte fraktionale Systeme 49
4.1.1 Eigenschaft zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses 50
4.1.2 Wahl der Modulationsfunktion 53
4.1.3 Numerische Umsetzung des Modulationsfunktionsverfahrens 60
4.2 Modulationsfunktionsverfahren für zeitvariante fraktionale Systeme 64
4.2.1 Identifikationsgleichung 64
4.2.2 Eigenschaft zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses 65
4.2.3 Wahl der Modulationsfunktion 67
4.3 Erwartungstreue Parameteridentifikation bei verrauschtem Ausgangssignal 72
4.3.1 Analyse des Identifikationsfehlers des Modulationsfunktionsverfahrens bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate 72
4.3.2 Methode der Hilfsvariable für fraktionale Systeme 74
4.4 Zusammenfassung und Diskussion der Parameteridentifikationsverfahren 81

5 Short-Memory-Prinzip für fraktionale Systeme 83
5.1 Geschlossene Lösung unter Berücksichtigung des Short-Memory-Prinzips 83
5.2 Simulationsfehler bei Anwendung des Short-Memory-Prinzips 85
5.3 Konvergenzanalyse der geschlossenen Lösung basierend auf dem Short-Memory-Prinzip 86
5.4 Beispiel zur Illustrierung der Methode der Hilfsvariablen für fraktionale Systeme 94
5.5 Zusammenfassung und Diskussion des Short-Memory-Prinzips für fraktionale Systeme 96

6 Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation für fraktionale Systeme 99
6.1 Ableitungsordnungsidentifikation als Nullstellenproblem 99
6.1.1 Formulierung des Nullstellenproblems 100
6.1.2 Lösungsansatz und Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens bei rauschfreien Ausgangssignal 101
6.1.3 Kombination des Newton-Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation und des Modulationsfunktionsverfahrens zur Parameteridentifikation 108
6.1.4 Iterative Spline-Interpolation zur Ableitungsordnungsidentifikation . . . 118
6.1.5 Einfluss eines verrauschten Ausgangssignal auf das Nullstellenproblem 126
6.1.6 Zusammenfassung und Diskussion der auf dem Nullstellenproblem basierenden Verfahren 128

6.2 Ableitungsordnungsidentifikation als Optimierungsproblem 130
6.2.1 Optimierungsproblem basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren und Lösungsansatz 130
6.2.2 Kombination des Optimierungsproblems zur Ableitungsordnungsidentifikation und der Parameteridentifikation mittels der IV-Methode 136
6.2.3 Optimierungsproblem basierend auf dem Gleichungsfehler und Lösungsansatz 139
6.2.4 Zusammenfassung und Diskussion der optimierungsbasierten Verfahren 148

7 Identifikation der Parameter- und Ableitungsordnung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle 151
7.1 Versuchsbeschreibung und fraktionales Batteriezellmodell 151
7.2 Identifikation der Parameter und der Ableitungsordnung des fraktionalen Batteriezellmodells 155
7.3 Zusammenfassung und Diskussion der Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation 160

8 Zusammenfassung 163

A Elektrochemische Impedanzspektroskopie XIX

B Initialisierungsfunktionen XXI

C Beweise XXIII
C.1 Beweise zu den partiellen Ableitungen des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov XXIII
C.2 Beweis von Lemma 3.9: Geschlossene Lösung für fraktionale Differentialgleichungen XXV
C.3 Beweis von Lemma 4.16: Standardabweichungen des Gleichungsfehlers und der Hilfsvariablen XXV
C.4 Beweis von Lemma 6.5: Beschränktheit der ersten partiellen Ableitung der Parameter XXVII
C.5 Beweis von Lemma 6.6: Beschränktheit der zweiten partiellen Ableitung der Parameter XXIX
C.6 Beweis von Lemma 6.8: Konvergenz der Spline-Funktion XXX
C.7 Beweis von Lemma 6.11: Beschränktheit der Ableitung der Parameter bei verrauschtem Ausgangssignal XXXVII
C.8 Größe im Beweis zum Theorem 6.4: Konvergenz der iterativen Vorschrift . XXXVIII

D Polynom-Modulationsfunktion XLI

E Verallgemeinerte Leibniz-Regel für mehrere Faktoren XLIII

F Aufbau des Batteriemessstands XLV

G Zellspezifikation der Kokam Lithium-Polymer-Batteriezelle XLVII

H Anregungs- und Ausgangssignal für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation XLIX

I Zusammenfassung der Einstellparameter für die praktische Anwendung LI

J Vergleich der Simulationen basierend auf den Referenzparametern und Identifikationsergebnissen LIII

Literaturverzeichnis LV

Abbildungsverzeichnis

2.1 Schematische Darstellung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle 6
2.2 Vergleich des Impedanzverlaufs eines Finite Length Warburg-Elements, eines RQ-Glieds und eines RC-Glieds 11
2.3 Überblick über Einteilung von Identifikationsverfahren für fraktionale Systeme 15

4.1 Grafische Darstellung zweier gewichteter Spline-Type-Modulationsfunktionen und deren fraktionalen Ableitungen 59
4.2 Ein- und Ausgangssignal für die Parameteridentifikation initialisierter fraktionaler Systeme 63
4.3 Vergleich der Parameteridentifikationsergebnisse initialisierter fraktionaler Systeme für zwei unterschiedliche Modulationsfunktionen 63
4.4 Ein- und Ausgangssignal für die Parameteridentifikation für zeitvariante fraktionale Systeme 71
4.5 Identifikationsergebnisse für die Parameter eines zeitvarianten fraktionalen Systems 71

5.1 Verlauf des Simulationsfehlers für $\alpha_0 < 1$ und $\alpha_0 \geq 1$ 93
5.2 Ein- und Ausgangssignal für die Parameteridentifikation bei verrauschtem Ausgangssignal 95
5.3 Identifikationsergebnisse für die Parameter bei verrauschtem Ausgangssignal 96

6.1 Illustration des Nullstellenproblems zur Ableitungsordnungsbestimmung 101
6.2 Zweistufiges iteratives Verfahren zur Identifikation der Ableitungsordnung und der Parameter eines fraktionalen Systems 114
6.3 Ein- und Ausgangssignal für gemeinsame Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation basierend auf dem Nullstellensuchproblem 116
6.4 Identifikation der Ableitungsordnungen basierend auf dem Nullstellensuchproblem 117
6.5 Identifikation der Parameter basierend auf dem Nullstellensuchproblem 117
6.6 Ein- und Ausgangssignal für gemeinsame Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation mittels iterativer Spline-Interpolation 124
6.7 Bestimmung aller Nullstellen der Identifikationsgleichung mit der iterativen Spline-Interpolation 125
6.8 Identifikation der Parameter mit der iterativen Spline-Interpolation 125
6.9 Verschiebung der Nullstellen durch ein verrauschtes Ausgangssignal 128
6.10 Ein- und Ausgangssignal für die Konvexitätsbetrachtung 135
6.11 Illustration der Konvexität zur optimierungsbasierten Ableitungsordnungsbestimmung 135

6.12 Gütemaß in Abhängigkeit des Eingangsparameters $\hat{b}_0$ bei vernachlässigter Systemhistorie . . . 148

7.1 Schematische Darstellung des Messaufbaus zur Identifikation der Parameter und Ableitungsordnung einer Lithium-Polymer-Batteriezelle . . . 152
7.2 Gemessenes Anregungssignals für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation . . . 154
7.3 Gemessene Ausgangsspannung für die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation . . . 154
7.4 Vergleich der Messung und der mit den Referenzparametern durchgeführten Simulation der Ausgangsspannung . . . 156
7.5 Identifikationsergebnisse der Parameter und der Ableitungsordnung einer Lithium-Polymer-Batteriezelle . . . 158
7.6 Vergleich der Messung und den Simulationen mit den identifizierten Parametern und Ableitungsordnung . . . 159
7.7 Resultierender Fehler zwischen Messung und Simulation mit den identifizierten Parametern und Ableitungsordnung . . . 160

A.1 Impedanzspektrum der in dieser Arbeit eingesetzten Lithium-Polymer-Batteriezelle bei einem SOC = 50 % und einem SOC = 90 % . . . XX

E.1 Multimengen für die erste und zweite Ableitung einer Funktion f, die sich als Produkt von drei Funktionen schreiben lässt . . . XLIV

G.1 Datenblatt der Lithium-Polymer-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H der Firma Kokam . . . XLVII
G.2 SOC-OCV-Kurve der Lithium-Polymer-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H XLVIII
G.3 SOC-abhängige differentielle Kapazität der Lithium-Polymer-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H . . . XLVIII

H.1 Anregungssignals für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation . . . XLIX
H.2 Gemessene Ausgangsspannung korrigiert um die Ruhespannung für die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation . . . XLIX

J.1 Vergleich der Simulation mit den Referenzparametern und den Simulationen mit den identifizierten Parametern und Ableitungsordnung . . . LIII
J.2 Resultierender Fehler zwischen der Simulation mit den Referenzparametern und den Simulationen mit den identifizierten Parametern und Ableitungsordnung . . . LIV

Tabellenverzeichnis

7.1 Vergleich der relativen Fehler beider optimierungsbasierter Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation . . . 159

I.1 Einstellparameter für die rekursive Methode der Hilfsvariablen . . . LI
I.2 Einstellparameter für die Parameteridentifikation . . . LI
I.3 Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren . . . LII
I.4 Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Gleichungsfehler . . . LII

Abkürzungen und Symbole

Verwendete Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
BMS	Batterie-Management-System
CNLS	Komplexwertige, nichtlineare Methode der kleinsten Quadrate (engl. complex nonlinear least squares)
CPE	Element mit konstanter Phase (engl. constant phase element)
DDC	Verteilungsfunktion der differentiellen Kapazität (engl. distribution function of differential capacity)
DRT	Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten (engl. distribution of relaxation times)
EIS	Elektrochemische Impedanzspektroskopie
FDGL	Fraktionale Differentialgleichung
FLW	Finite Length Warburg-Element
FSW	Finite Space Warburg-Element
IRS	Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
IV	Hilfsvariable (engl. instrumental variable)
LiPO	Lithium-Polymer
LS	Kleinste Quadrate (engl. least squares)
OCP	Leerlaufpotential (engl. open circuit potential)
OCV	Leerlaufspannung (engl. open circuit voltage)
SMP	Short-Memory-Prinzip
SNR	Signal-Rausch-Verhältnis (engl. signal-to-noise ratio)
SOC	Ladezustand (engl. state of charge)
SOH	Gesundheitszustands, im Kontext von Batterien: Kennwert des Alterungszustands (engl. state of health)

Symbole

Symbol	Beschreibung
α	Fraktionale Ableitungsordnung
β	Fraktionale Ableitungsordnung
$c(x,t)$	Orts- und zeitabhängige Konzentration eines Stoffes
χ	Hilfsfunktion für partielle Ableitungen
D	Diffusionskoeffizient

Symbol	Beschreibung
δ	Delta-Distribution
$\Delta\varphi$	Phasenverschiebung
e	Ausgangsfehler, Gleichungsfehler und Simulationsfehler
E	Elektrodenpotential
E^0	Standardelektrodenpotential
ϵ^*	Komplexe Dielektrizitätskonstante
ϵ_0	Statische Dielektrizitätskonstante für die Frequenz $f = 0\,\mathrm{Hz}$
ϵ_∞	Dielektrizitätskonstante für die Frequenz $f \to \infty$
ε	Rauschen
E	Erwartungswert
η	Initialisierungsfunktion der fraktionalen Integration
F	Fehler durch numerische Integration, Farraday-Konstante
f	Frequenz, absolut stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t < c$ und $c \in \mathbb{R}$
γ	Modulationsfunktion
Γ	Eulersche Gamma-Funktion
Γ_i	Unvollständige Gamma-Funktion
$G(s)$	Laplace-Transformierte einer Funktion $g(t)$
h	absolut stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t > c$ und $c \in \mathbb{R}$
i	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung, Strom, Stromverteilung
J	Gütemaß, Teilchenstromdichte
j	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung, komplexe Einheit
K	Lipschitz-Konstante
k	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung
κ	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung
L	Speicherlänge des Short-Memory-Prinzips, Länge des Diffusionsbereichs
l	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung
λ	Hilfsgröße für Summen und zur Indizierung
M	Supremum einer Funktion
$\boldsymbol{M}$	Messmatrix der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der Hilfsvariablen
m	Zählergrad, Eingangsordnung
$\boldsymbol{m}$	Vektor der Messmatrix
μ	Bias der Methode der kleinsten Quadrate, Hilfsgröße für Summen
N	Anzahl an Teilintervallen, Anzahl an Messgleichungen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne das Element 0)
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit dem Element 0
n	Nennergrad, Systemordnung
ν	Hilfsgröße für Summen
$\mathcal{O}$	Landau-Operator
o	Ordnung der Spline-Type-Modulationsfunktion, Ordnung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion

Symbol	Beschreibung
Ω	Hilfsfunktion für partielle Ableitungen
ω	Kreisfrequenz
P	Gewichte einer numerischen Integration
$\boldsymbol{p}$	Parametervektor
$\boldsymbol{\varphi}$	Hilfsvektor zum Ausdruck einer Matrixnorm als Vektornorm
Ψ	Hilfsfunktion für partielle Ableitungen
ψ	Initialisierungsfunktion der fraktionalen Ableitung
Q	Ladung
q	Iterationsschritte
R	universelle Gaskonstante
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen
r	Anzahl Abtastwerte im Identifikationshorizont
ρ	Korrelationskoeffizient
ϱ	Konstanter Offset im Messsignal
σ^2	Varianz
S_0	Nullstellen einer interpolierenden Spline-Funktion
S_{T}	Tupel zur Beschreibung einer interpolierenden Spline-Funktion
s	komplexe Frequenz, Anzahl der Impulse der Spline-Type-Modulationsfunktion, Anzahl der Impulse der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion
$\mathfrak{s}$	Differentialoperator nach Mikusiński
T	Abtastzeit, absolute Temperatur
T_{Δ}	Zeitspanne zwischen zwei Messungen
T_i	Identifikationshorizont
T_K	Temperatur im Innenraum des Klimaschranks
T_P	Pulsdauer eines Pseudozufallsrauschens
t	Zeit
τ	Hilfsgröße für die Zeit, Zeitkonstante eines dynamischen Prozesses
t_i	Spezifischer Zeitpunkt
Θ	Heaviside-Funktion
$\boldsymbol{\theta}$	Vektor der Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems
u_{ec}	Überspannung in einem elektrochemischen System
Υ	Hilfsfunktion für partielle Ableitungen
u	Eingangssignal, Spannung
$\boldsymbol{W}$	Hilfsmatrix der Methode der Hilfsvariablen
$\boldsymbol{w}$	Vektor der Hilfsmatrix
X_{Δ}	Unterteilung eines Intervalls $[x_u, x_o]$
Ξ	Geschlossene Untermenge für Konvergenzbeweis
x	Ortsvariable
ξ	Fehlerabschätzung
y	Ausgangssignal
$\tilde{y}$	Verrauschtes Ausgangssignal

Symbol	Beschreibung
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
ζ	Kubische Spline-Funktion
$\underline{Z}$	Impedanz
$\boldsymbol{z}$	Messvektor der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der Hilfsvariablen
z_e	Äquivalentzahl

Operatoren

Operator	Beschreibung
$\lceil x \rceil$	$\lceil x \rceil := \min \{ k \in \mathbb{Z} \| x \in \mathbb{R} \wedge k > x \}$
$\lfloor x \rfloor$	$\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil - 1$
$\hat{\square}$	Amplitude eines zeitlich veränderlichen Signals, Identifikationswert
${}_{t_u}\mathrm{d}_{t_o}^{\alpha}$	Fraktionale Differentiation mit der Ordnung α, der unteren t_u und der oberen Grenze t_o
${}_{t_u}\mathrm{D}_{t_o}^{\alpha}$	Initialisierte fraktionale Differentiation mit der Ordnung α, der unteren t_u und der oberen Grenze t_o
$\{\cdot\}_i$	i-tes Element eines Vektors
$\{\cdot\}_{i,j}$	(i,j)-tes Element einer Matrix
${}_{t_u}i_{t_o}^{\alpha}$	Fraktionale Integration mit der Ordnung α, der unteren t_u und der oberen Grenze t_o
${}_{t_u}\mathrm{I}_{t_o}^{\alpha}$	Initialisierte fraktionale Integration mit der Ordnung α, der unteren t_u und der oberen Grenze t_o
$\square^{-1}$	Inverse einer Matrix
$\square^{+}$	Pseudo-Inverse einer Matrix
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol für eine asymptotisch obere Schranke
$\mathcal{L}$	Laplace-Transformation einer Funktion
$\bar{\square}$	Mittelwert einer Größe
$\square^{\mathsf{T}}$	Transponierter Vektor, transponierte Matrix

Indizes

Index	Beschreibung
2002	DS2002 Multi-Channel A/D Board
2004	DS2004 High-Speed A/D Board
BOP	Bipolar Power Supply vom Typ BOP 20-20M
C	Definition nach Caputo
Diff	Diffusion
dm	Agilent 34410A

Index	**Beschreibung**
GL	Definition nach Grünwald-Letnikov
ls	Linksseitiger Operator
LT	Ladungstransfer
Red	Reduktion
RL	Definition nach Riemann-Liouville
RQ	RQ-Glied
rs	Rechtsseitiger Operator
SEI	Solid Electrolyte Interface

1 Einleitung

Der Import von Lithium-Ionen-Batteriezellen nach Deutschland hat sich von 55 Mio. Stück im Jahr 2012 auf 231 Mio. Stück im Jahr 2019 mehr als vervierfacht[1]. Dieser Trend hängt mit der steigenden Forderung nach Elektromobilität zusammen. Während im Jahr 2020 noch 136.000 Elektroautos zugelassen wurden, sind es im Jahr 2021 (Stand: 01. April) bereits 365.000[2]. Ebenfalls stieg die Absatzzahl von E-Bikes in den letzten Jahren stark an. Diese betrug im Jahr 2010 noch 200.000 Stück und im Jahr 2020 bereits 1.950.000 Stück[3]. Ein weiterer Treiber des Trends ist das Internet der Dinge[4], wodurch zum einen die Forderung nach immer leistungsstärkeren mobilen Endgeräten besteht. Zum anderen werden viele Geräte wie Zahnbürsten oder Kopfhörer ebenfalls elektrifiziert. Auch der Wunsch nach Nutzung erneuerbarer Energien, die aufgrund ihrer Volatilität eine Speicherung erfordern, sorgt für einen Anstieg in der Batterienutzung [Bun20]. Speziell im Bereich der mobilen Endgeräte und der Elektromobilität haben sich Lithium-Ionen-Batteriezellen aufgrund ihrer hohen Energiedichte durchgesetzt [BEH+13]. Bei der Nutzung von Batteriezellen ist zu berücksichtigen, dass sich Zelleigenschaften, wie beispielsweise der Innenwiderstand, die Kapazität und die Energiedichte, sowohl alterungsbedingt als auch betriebsbedingt durch den aktuellen Ladezustand, Strom und Temperatur ändern [Kor13, S. 16 ff.], [Ill14, S. 19 ff.]. Abhängig der momentanen Zelleigenschaften müssen die Grenzen der Betriebsgrößen wie zum Beispiel der maximale Strom und damit die Leistungsabgabe festgelegt werden [NBJ20]. Da die Energiedichte einer Batteriezelle mit dem Ladezustand zusammenhängt, können Ladezustandsschätzer eingesetzt werden, um Rückschlüsse auf die Energiedichte zu ziehen [Ill14, S. 19]. Zur Bestimmung der Batteriezellparameter ist die am häufigsten eingesetzte Methode die elektrochemischen Impedanzspektroskopie (EIS). Die EIS ist ein Frequenzbereichsverfahren, das sehr zeitaufwändig ist und konstante Umgebungsbedingungen bezüglich der Temperatur und des Ladezustands benötigt [NBJ20]. Da diese Bedingungen in der Regel für eine praktische Anwendung im Betrieb nicht erfüllt sind, wird eine phänomenologische Maßzahl State of Health[5] (SOH), die aus einem Spannungssprung und dem resultierenden Strom geschätzt wird, statt der Batteriezellparameter verwendet [NBJ20]. In Abhängigkeit der Maßzahl SOH werden dann die Grenzen der Betriebsgrößen festgesetzt [NBJ20].

Um eine effizientere Nutzung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle zu ermöglichen und die phänomenologische Maßzahl SOH zu ersetzen, werden vermehrt modellbasierte Ansätze zur Bestimmung der Batteriezellparameter entwickelt [NBJ20]. Als Modellklasse besitzen sowohl

[1] https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1082426/umfrage/import-und-export-von-lithium-ionen-akkus-in-deutschland/
[2] https://de.statista.com/statistik/daten/studie/265995/umfrage/anzahl-der-elektroautos-in-deutschland/
[3] https://de.statista.com/statistik/daten/studie/152721/umfrage/absatz-von-e-bikes-in-deutschland/
[4] engl. internet of things
[5] engl. für Gesundheitszustands, im Kontext von Batterien: Kennwert des Alterungszustands

elektrochemische als auch fraktionale Modelle den Vorteil, dass diese zusätzlich Informationen über einzelne Prozesse liefern, die innerhalb der Batteriezelle ablaufen [Ill14, S. 49 ff.], [Eck17, S. 7 f.]. Bei elektrochemischen Modellen folgt dies daraus, dass diese Modelle die Physik der Lithium-Ionen-Batteriezelle auf Atomebene nachbildet. Bei fraktionalen Modellen ist es dagegen darin begründet, dass Modellparameter einzelnen Prozessen innerhalb der Lithium-Ionen-Batteriezelle zugeordnet werden können und daher elektrochemisch interpretierbar sind [Eck17, S. 15 ff.], [SGL+18]. Für die praktische Anwendung müssen die Batteriezellparameter mittels einem Batterie-Management-System (BMS) bestimmt werden, die meist auf Mikrocontroller realisiert werden [CKVM03], damit die Grenzen der Betriebsgrößen auch während der Batterienutzung festgesetzt werden können [NBJ20]. Aufgrund der Rechenintensität elektrochemische Modelle lassen sich diese nicht echtzeitfähig auf Mikrocontrollern implementieren, weshalb fraktionale Modelle zu bevorzugen sind [SGL+18]. Aus diesem Grund wird unter Berücksichtigung einer möglichst großen Nutzungsdauer der Batteriezellen im Sinne einer effizienten Nutzung ein Identifikationsverfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsbestimmung von fraktionalen Systemen, das

(a) die elektrochemische Interpretierbarkeit der Parameter und Ableitungsordnungen gewährleistet,
(b) unabhängig von bestimmten Anfangswertbedingungen des fraktionalen Systems ist,
(c) bereits zur Verfügung stehende Messdaten nutzt und
(d) sich auf einem Digitalrechner implementieren lässt.

Falls die Anforderung (a) von einem Identifikationsverfahren nicht erfüllt wird, sind keine Rückschlüsse auf die Prozesse innerhalb einer Lithium-Ionen-Batteriezelle möglich. Aus diesem Grund ist die elektrochemische Interpretierbarkeit der Parameter und Ableitungsordnungen relevant. Die Anforderung (b) ergibt sich daher, dass eine Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems jederzeit und nicht nur unter bestimmten Bedingungen möglich sein muss, um einen sicheren Betrieb der Batteriezelle zu gewährleisten [Kup19, S. 14 ff.]. Hinter der Anforderung (c) verbergen sich bezogen auf eine Batteriezelle zwei Aspekte. Zum einen werden dadurch Verfahren ausgeschlossen, die eine Anregung mit einem speziellen Signal benötigen, um eine Unterbrechung der Batterienutzung zu vermeiden. Zum anderen werden in den eingesetzten BMSen bereits der Strom und die Spannung kontinuierlich gemessen [CKVM03]. Durch Verwendung dieser Messdaten wird der messtechnische Aufwand nicht erhöht. Die überwiegend rechnergestützte Messwerterfassung mit einer anschließenden digitalen Signalverarbeitung führt auf Anforderung (d) [Ler16, S. 311].

Dass Lithium-Ionen-Batteriezellen durch fraktionale Modelle effektiv beschrieben werden können, liegt in der sogenannten nicht-lokalen Eigenschaft des fraktionalen Ableitungsoperators. Aufgrund dieser Eigenschaft sind zukünftige Funktionswerte der fraktionalen Ableitung nicht nur von dem Anfangswert wie bei in der Systemtheorie üblichen Ableitung abhängig. Stattdessen müssen alle vergangene Funktionswerte explizit berücksichtigt werden [LH98]. Diese Tatsache auf ein System bezogen bedeutet, dass zur eindeutigen Bestimmung des Systemverlaufs nicht nur die Anfangswerte wie bei gewöhnlichen Systemen, sondern der gesamte vergangene Systemverlauf benötigt wird. Der vergangene Systemverlauf wird auch als Systemhistorie bezeichnet und wird bei der Systembeschreibung durch eine Initialisierungsfunktion abgebildet [SMMO10], die als Gedächtnis oder Speicher verstanden werden kann [SMMO10]. Durch die Berücksichtigung der Systemhistorie besteht stets eine direkte Verbindung zwischen

dem aktuellen Funktionswert und dem Anfangswert. Bezogen auf den Diffusionsprozess, der in einer Lithium-Ionen-Batteriezelle abläuft, entspricht die Elektronenverteilung vor dem Beginn der Diffusion aus einer Ruhelage diesem Anfangswert [LH98].

Ein modellbasierter Ansatz ermöglicht im Gegensatz zu der phänomenologischen Maßzahl SOH Informationen über Prozesse innerhalb einer Batteriezelle zu generieren. Da sich die Batteriezellparameter alterungsbedingt und betriebsbedingt ändern, ist ein Einsatz von Identifikationsverfahren während der Batterienutzung notwendig. Identifikationsverfahren für fraktionale Systeme können in Frequenzbereichs- und Zeitbereichsmethoden unterteilt werden. Frequenzbereichsmethoden basieren vorwiegend auf der EIS [Ill14, S. 24 f.] und der nachgelagerten Analyse des Impedanzspektrums, zum Beispiel mit der Distribution of Relaxation Times[6] (DRT) [Ill14, S. 26]. Für die EIS wird die Lithium-Ionen-Batteriezelle mit sinusförmigen Stromsignalen unterschiedlicher Frequenz nacheinander angeregt und das Impedanzspektrum mittels einer Spannungsmessung punktweise aufgezeichnet. Bei der Lithium-Ionen-Batteriezelle sind im Besonderen auch die niedrigen Frequenzen von Bedeutung, sodass die Messungen der EIS langwierig sind [Sch17, S. 80 f.]. Sowohl das Messprinzip als auch die Messdauer verhindern einen Einsatz in einer praktischen Anwendung zur Bestimmung der Batteriezellparameter, da einerseits ein spezielles Anregungssignal notwendig ist und die Lithium-Ionen-Batteriezelle stets zu Beginn der Messung in Ruhe sein muss.

Im Gegensatz zu den Frequenzbereichsmethoden können die Strom- und Spannungsmessungen, die im BMS aufgenommen werden, in Zeitbereichsmethoden zur Batteriezellparameteridentifikation verwendet werden. Bei allen bisherigen Methoden für fraktionale Systeme wird jedoch vorausgesetzt, dass das zu System zu Beginn der Identifikation in Ruhe ist. Aus Sicht der fraktionalen Ableitung ist in diesem Fall die Systemhistorie Null, sodass diese auch keinen Einfluss auf den zukünftigen Systemverlauf besitzt [Eck17, S. 29 ff.]. Damit diese Voraussetzung in der Praxis erfüllt wird, darf die Lithium-Ionen-Batteriezelle vor einer Batteriezellparameteridentifikation so lange nicht verwendet werden, bis die Diffusionsprozesse innerhalb der Lithium-Ionen-Batteriezelle abgeklungen sind. Dieser Abklingvorgang kann allerdings im Stundenbereich liegen [Sch17, S. 133 ff.], sodass die Voraussetzung eines in Ruhe befindlichen Systems bezogen auf die Verfügbarkeit der Lithium-Ionen-Batteriezelle eine starke Einschränkung darstellt. Zudem gehen die meisten Ansätzen von unverrauschten Messdaten aus.

Aus dem aktuellen Wissenschaftsstand geht hervor, dass zwar Identifikationsverfahren existieren. Allerdings betrachten nur wenige Verfahren verrauschte Ausgangssignale. Die restriktivste Anforderung, die die bisherigen Ansätze besitzen, betrifft die Anfangsbedingung, dass sich das System zu Beginn der Identifikation in Ruhe befinden muss. Daraus ergibt sich die zentrale Forschungsfrage der Arbeit:

Wie kann in einem Verfahren zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation fraktionaler Systeme berücksichtigt werden, dass

- *das zu untersuchende reale System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe sein muss,*
- *bereits vorhandene Messdaten, die von Rauschen überlagert sind und als Zeitbereichsmessungen vorliegen, verwendet werden können und*
- *sich das Verfahren auf einem Digitalrechner umsetzen lässt?*

[6] engl. für Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten

2 Einführung und Stand der Wissenschaft

In diesem Kapitel wird der Stand der Wissenschaft, der in der Einleitung angesprochen wird, genauer betrachtet. Dabei steht zum einen die Modellierung von Batteriezellen als fraktionales Modell und die Verbindung der fraktionalen Modellparameter zu der Physik im Fokus. Zum anderen werden verschiedene Ansätze zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation beleuchtet. Anhand der Vor- und Nachteile der einzelnen Ansätze wird schließlich die eingangs formulierte Forschungsfrage konkretisiert.

2.1 Einführung: Fraktionales Modell einer Batteriezelle

In diesem Abschnitt wird die Modellierung der Impedanz von Batteriezellen mittels fraktionaler Modelle motiviert. Dafür wird als Erstes im Abschnitt 2.1.1 der Aufbau und die Funktionsweise einer Lithium-Ionen-Batteriezelle erläutert und die innerhalb einer Batteriezelle auftretenden Verlustprozesse angegeben. Da die Verlustprozesse durch Diffusionsprozesse bestimmt werden, wird im Abschnitt 2.1.2 die allgemeine Diffusionsimpedanz eines elektrochemischen Systems hergeleitet und die Approximation der Diffusionsimpedanz mittels fraktionaler Modelle beschrieben. Abschließend wird das fraktionale Batteriemodell im Abschnitt 2.1.3 definiert.

2.1.1 Aufbau, Funktionsweise und Verlustprozesse einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

Aufbau und Funktionsweise einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

Der prinzipielle Aufbau einer Batteriezelle, der aus zwei Elektroden, einem leitfähigen Elektrolyt und einem Separator besteht und in der Abbildung 2.1 dargestellt ist, ist unabhängig von den an den Elektroden eingesetzten Materialien [Kor13, S. 16]. Die Elektroden setzen sich aus einem Stromableiter sowie Aktivmaterial zusammen. Für die negative Elektrode wird in der Regel Kupfer als Stromableiter und Graphit als Aktivmaterial eingesetzt. Für die positive Elektrode wird dagegen Aluminium als Stromableiter und Mischoxide als Aktivmaterial verwendet [Kor13, S. 14]. In dem Aktivmaterial der negativen Elektrode ist das Lithium bei einer voll geladenen Lithium-Ionen-Batteriezelle eingelagert. Beim Entladen trennt sich an der negativen Elektrode ein Elektron vom Lithium (1). Während das Lithium-Ion durchs Elektrolyt zur positiven Elektrode diffundiert (2), fließt das Elektron über den äußeren Schaltkreis (Last) zur positiven Elektrode. An dieser Elektrode reagiert das Elektron mit dem Lithium-Ion (3) und das Lithium lagert sich in das Aktivmaterial der positiven Elektrode ein (4). Beim Laden läuft der beschriebene Prozess umgekehrt ab.

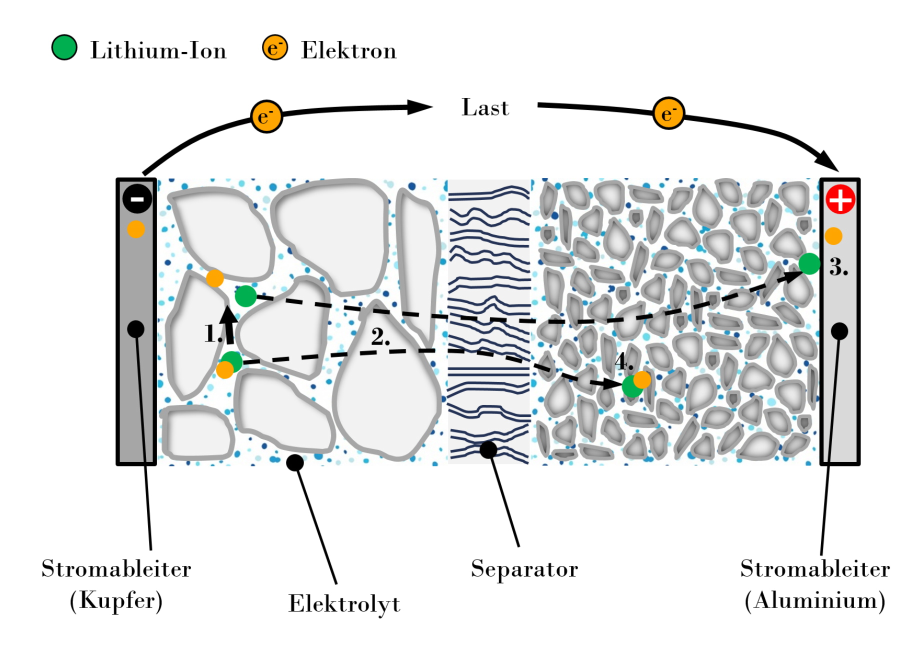


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

Jedes Aktivmaterial besitzt ein spezifisches Leerlaufpotential[7] (OCP), das eine charakteristische Abhängigkeit bezüglich der Lithium-Konzentration aufweist [DB11, S. 851 ff.]. Die Differenz der OCPe der positiven und negativen Elektrode definiert die Leerlaufspannung[8] (OCV) (siehe Definition 2.2). Da der Ladezustand[9] (SOC), der in Definition 2.1 formal beschrieben ist, proportional zur Lithium-Konzentration und einfacher bestimmbar ist, wird die OCV üblicherweise in Abhängigkeit des SOCs angegeben [DB11, S. 851 ff.], [Ill14, S. 22].

Definition 2.1 (Ladezustand [Ill14, S. 22])

Sei $Q_{\mathrm{aktuell}}, Q_{\mathrm{Nenn}}, t \in \mathbb{R}$.
Der Ladezustand

$$\mathrm{SOC}(t) := 100\,\% \frac{Q_{\mathrm{aktuell}}(t)}{Q_{\mathrm{Nenn}}} \tag{2.1}$$

ist ein prozentuales Maß im Bereich $[0\,\%, 100\,\%]$ *zur Angabe, wie viel Ladung* Q_{aktuell} *zum aktuellen Zeitpunkt* t *bezogen auf die Nennkapazität* Q_{Nenn} *noch entnommen werden kann bzw. wie viel Ladung* $Q_{\mathrm{Nenn}} - Q_{\mathrm{aktuell}}(t)$ *eingebracht werden kann.*

---
7 engl. open circuit potential
8 engl. open circuit voltage
9 engl. state of charge

Definition 2.2 (Leerlaufspannung [LSF+16])
Sei $E_{\mathrm{pos}}, E_{\mathrm{neg}} \in \mathbb{R}$ und SOC der Ladezustand entsprechend Definition 2.1.
Unter Berücksichtigung der Definition 2.1 des Ladezustands zur Normalisierung der Lithium-Konzentration ist die Leerlaufspannung als

$$\mathrm{OCV}\,(\mathrm{SOC}) := E_{\mathrm{pos}}\,(\mathrm{SOC}) - E_{\mathrm{neg}}\,(\mathrm{SOC}) \tag{2.2}$$

mit dem Elektrodenpotential E der positiven (pos) und negativen (neg) Elektrode und dem Ladezustand SOC definiert.

Verlustprozesse einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

Neben den vorangegangenen Größen SOC und OCV zur Beschreibung des Zustands einer Batteriezelle treten aufgrund der Zelleigenschaften Verlustprozesse beim Beschalten der Zelle auf, die in der nachfolgenden Definition 2.3 angegeben werden [Ill14, S. 16 ff.], [Jos06].

Definition 2.3 (Verlustprozesse in einer Lithium-Ionen-Batteriezelle [Ill14, S. 16 ff.], [Jos06])
Die wesentlichen Verlustprozesse, die innerhalb einer Lithium-Ionen-Batteriezelle auftreten, sind:

- ***Elektrischer Widerstand:***
  Der elektrische Widerstand einer Lithium-Ionen-Batteriezelle setzt sich aus dem Widerstand des Elektrolyts, des Stromableiters und des Aktivmaterials zusammen. Hinzu kommt der Übergangswiderstand zwischen dem Stromableiter und dem Aktivmaterial.
- ***Ladungstransfer:***
  Der Ladungstransfer umfasst den gesamten Transportprozess eines Lithium-Ions von der negativen Elektrode zur positiven Elektrode, das Austreten eines Elektrons aus dem Stromableiter, die Reaktion des Lithium-Ions mit dem Elektron und die Einlagerung des Lithiums in das Aktivmaterials beim Entladevorgang bzw. in umgekehrter Richtung beim Ladevorgang.
- ***Festkörperdiffusion:***
  Abhängig vom Konzentrationsgradient des Lithiums innerhalb eines Aktivmaterials finden Diffusionsprozesse statt, sodass der energetisch günstigste Zustand innerhalb des Aktivmaterials erreicht wird.

Die Verlustprozesse rufen bei Einprägung eines Stroms eine Überspannung hervor, die die OCV beim Entladen verringert und beim Laden erhöht [JW06, S. 16]. Eine Möglichkeit, um den Zusammenhang zwischen der Überspannung und dem Strom zu beschreiben, ist über die Impedanz der Lithium-Ionen-Batteriezelle [Kup19, S. 10].

2.1.2 Diffusionsimpedanz elektrochemischer Systeme und die Approximation mittels fraktionaler Modelle

In diesem Abschnitt wird zunächst die allgemeine Diffusionsimpedanz für elektrochemische Systeme hergeleitet, die die Grundlage für elektrochemische Impedanzmodelle einer Lithium-Ionen-Batteriezelle bilden. Basierend darauf wird die empirische Approximation der elektrochemischen Modelle mittels fraktionaler Modelle motiviert.

Diffusionsimpedanz elektrochemischer Systeme

Der Ausgangspunkt zur Herleitung der Diffusionsimpedanz ist das konzentrationsabhängige Elektrodenpotential eines Redox-Paares, das durch die Nernst-Gleichung

$$E = E^0 + \frac{RT}{z_e F} \ln\left(\frac{c(x,t)}{c_{\text{Red}}}\right) \tag{2.3}$$

mit dem Elektrodenpotential E, dem Standardelektrodenpotential E^0, der universellen Gaskonstanten R, der absoluten Temperatur T, der Äquivalentzahl z_e, der Faraday-Konstante F und der Konzentration der betreffenden orts- und zeitabhängigen Redox-Partner $c(x,t)$ sowie c_{Red} bestimmt werden kann [LSF[+]16]. Bei der Konzentration beschreibt $c(x,t)$ den Anteil der Oxidations- und c_{Red} der Reduktionsteilreaktion. Unter der Annahme einer idealen reversiblen Reaktion ist die resultierende Konzentrationsänderung klein, sodass die Linearisierung der Nernst-Gleichung um das Gleichgewichtspotential [LSF[+]16]

$$E_{\text{lin}} = \left.\frac{\partial E}{\partial c}\right|_{x_0,t_0} \Delta c(x_0,t) = \frac{RT}{z_e F c(x_0,t_0)} \Delta c(x_0,t) \tag{2.4}$$

gültig ist [Fre05]. Über die Diffusionsstromdichte besteht ein Zusammenhang zwischen dem Strom i und der Teilchenstromdichte J

$$i(t) = -QD\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \tag{2.5}$$

$$= QJ(x,t) \tag{2.6}$$

mit der Ladung Q und dem Diffusionskoeffizienten D. Einsetzen von (2.4) und (2.5) in (2.8) ergibt die in [JW95] beschriebene Diffusionsimpedanz

$$\underline{Z}(s) = \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0,t_0)} \frac{\Delta C(x_0,s)}{J(x_0,s)} \tag{2.7}$$

unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $Q = Fz_e$ zwischen der Faraday-Konstante F und der Ladung Q. Allgemein beschreibt die Diffusionsimpedanz das Verhältnis von Überspannungen u_{ec}, die sich beim Anlegen eines Stroms einstellen, und der zur Stromverteilung zugehörige Strom i [Ill14, S. 5]

$$\underline{Z}(s) = \frac{u_{\text{ec}}(s)}{i(s)}. \tag{2.8}$$

Im Folgenden wird die Diffusionsimpedanz (2.7) für eine eindimensionale Diffusion hergeleitet. Für den zwei- und dreidimensionalen Fall wird auf Jacobsen [JW95] verwiesen, der auch die Grundlage für die Ausführungen im eindimensionalen Fall bildet. Der Ausgangspunkt ist die Laplace-Transformierte der eindimensionalen Diffusionsgleichung

$$D\frac{\partial^2 \Delta C(x,s)}{\partial x^2} - s\Delta C(x,s) = 0 \tag{2.9}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Delta C(x,s) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{s}{D}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}} \tag{2.10}$$

für die Konzentrationsabweichung ΔC. Abhängig der gewählten Randbedingungen ergeben sich die speziellen Lösungen für C_1 und C_2. Die erste Randbedingung bezieht sich auf die Elektrodenoberfläche bei $x_0 = 0$. An der Stelle $x_0 = 0$ berechnet sich die Teilchenstromdichte J unter Verwendung von (2.10) zu

$$J(x_0,s) = -D\left.\frac{\partial \Delta C(x,s)}{\partial x}\right|_{x_0=0} \tag{2.11}$$

$$= -\sqrt{sD}\,(C_1 - C_2)\,. \tag{2.12}$$

Die zweite Randbedingung beschreibt die Begrenzung des Diffusionsbereichs bei $x_L = L$. Wenn die Begrenzung einer Nernstschen Diffusionsschicht entspricht, gilt

$$\Delta C(x_L,s) = 0. \tag{2.13}$$

Falls die Diffusionsschicht durch eine undurchdringbare Begrenzung abgeschlossen wird, ist die zweite Randbedingung

$$J(x_L,s) = 0. \tag{2.14}$$

Nachfolgend werden für beide Randbedingungen die speziellen Impedanzen hergeleitet.

Nernstsche Diffusionsschicht

Im ersten Schritt wird die allgemeine Lösung (2.10) und die Randbedingung an der Elektrodenoberfläche (2.11) in die Formel zur Beschreibung der Diffusionsimpedanz (2.7) eingesetzt:

$$\underline{Z}(s) = -\frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0,t_0)} \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{sD}\,(C_1 - C_2)}. \tag{2.15}$$

Aus der Randbedingung für eine Nernstsche Diffusionsschicht (2.13) ergibt sich für C_1 und C_2 der Zusammenhang

$$C_2 = -C_1 e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}}. \tag{2.16}$$

Einsetzen von (2.16) in (2.15) resultiert im Finite Length Warburg-Element (FLW)

$$\underline{Z}(s) = \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0,t_0)} \frac{\left(e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}} - 1\right)}{\sqrt{sD}\left(e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}} + 1\right)} \tag{2.17}$$

$$= \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0,t_0)} \frac{\tanh\left(x_L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)}{\sqrt{sD}}. \tag{2.18}$$

Undurchdringbare Begrenzung

Die Randbedingung (2.14) liefert

$$C_2 = C_1 e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}} \tag{2.19}$$

als Zusammenhang der unbekannten Konstanten C_1 und C_2. Durch Einsetzen des Zusammenhangs (2.19) in (2.15) ergibt sich die auch als Finite Space Warburg-Element (FSW) bezeichnete Impedanz

$$\underline{Z}(s) = \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0, t_0)} \frac{\left(e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}} + 1\right)}{\sqrt{sD}\left(e^{2x_L\sqrt{\frac{s}{D}}} - 1\right)} \tag{2.20}$$

$$= \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0, t_0)} \frac{\coth\left(x_L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)}{\sqrt{sD}}. \tag{2.21}$$

Die Besonderheit der Diffusionsimpedanzen (2.18) und (2.21), die für ein allgemeines elektrochemisches System gültig ist, ist der konstante Phasenwinkel von 45° für hohe Frequenzen:

$$\lim_{s\to\infty} \underline{Z}(s) \approx \lim_{s\to\infty} \frac{RT}{(z_e F)^2 c(x_0, t_0)} \frac{1}{\sqrt{sD}}. \tag{2.22}$$

Der Phasenwinkel stellt sich wegen der Abhängigkeit der beiden Impedanzen von der Quadratwurzel der komplexen Frequenz $\sqrt{s}$ ein. Der Frequenzbereich, in dem die Phase konstant ist, wird dabei hauptsächlich durch den Diffusionskoeffizienten D bestimmt. Der hochfrequente Anteil der Diffusionsimpedanzen (2.18) und (2.21) lässt sich als ein Elemente mit konstanter Phase[10] (CPE)

$$\underline{Z}_{\text{CPE}}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega\tau)^\alpha} \tag{2.23}$$

mit $\tau, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ interpretieren, wobei in der Literatur auch häufig $\tau = Q$ als Notation für die Zeitkonstante verwendet wird [Pod98, S. 105 f.].

Approximation der Diffusionsimpedanz

Die Approximation der Diffusionsimpedanz (2.18) und (2.21) geht auf das empirische Modell der frequenzabhängigen Dielektrizitätskonstante von [CC41a], [CC41b] zurück. Das empirische Modell lässt sich eine Parallelschaltung von einem Widerstand R und einem CPE auffassen [Sab15] [Eck17] [Kup19]. Die aus der Parallelschaltung resultierende Impedanz

$$\underline{Z}_{\text{RQ}}(j\omega) = \frac{R}{1 + R(j\omega Q)^\alpha} \tag{2.24}$$

mit $R, Q, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ stellt aufgrund des nicht-ganzzahligen Exponenten α eine fraktionale Impedanz dar [Ill14, S. 37], die auch als RQ- oder ZARC-Element bezeichnet wird [Ill14, S. 37].

[10] engl. Constant Phase Element

In der Abbildung 2.2 werden die Impedanzverläufe eines FLWs (2.18) (durchgezogen), eines RQ-Glieds (2.24) (gestrichelt) und eines RC-Glieds (gestrichpunktet) gegenübergestellt. Charakteristisch für den Impedanzverlauf des FLWs ist der lineare Anstieg mit einer Steigung von $45°$, der durch das CPE bei hohen Frequenzen hervorgerufen wird. Mit abnehmender Frequenz geht der Impedanzverlauf in einen Halbkreis über. Während der Impedanzverlauf des RC-Glieds den charakteristischen Halbkreis ausbildet, ist der Impedanzverlauf des RQ-Glieds abgeflacht. Je kleiner der Exponent α ist, umso stärker flacht der Halbkreis ab. In der Abbildung ist das RQ-Glied mit $\alpha = 0{,}83$ dargestellt. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad kann genutzt werden, um den Impedanzverlauf des RQ-Glieds an den Impedanzverlauf des FLWs anzupassen. Durch die Anpassbarkeit des RQ-Glieds lassen sich die Diffusionsprozesse einer Batteriezelle durch RQ-Glieder gut approximieren und eine Zuordnung der RQ-Glieder zu den Diffusionsprozessen vornehmen, wodurch die elektrochemische Interpretierbarkeit gesichert werden kann [Eck17, S. 18 ff.]. Die in der Abbildung 2.2 dargestellte Approximation des FSWs mittels des RQ-Glieds bildet die Basis für die fraktionale Impedanzmodellierung der Diffusionsprozesse einer Batteriezelle, die im nächsten Abschnitt erläutert wird.



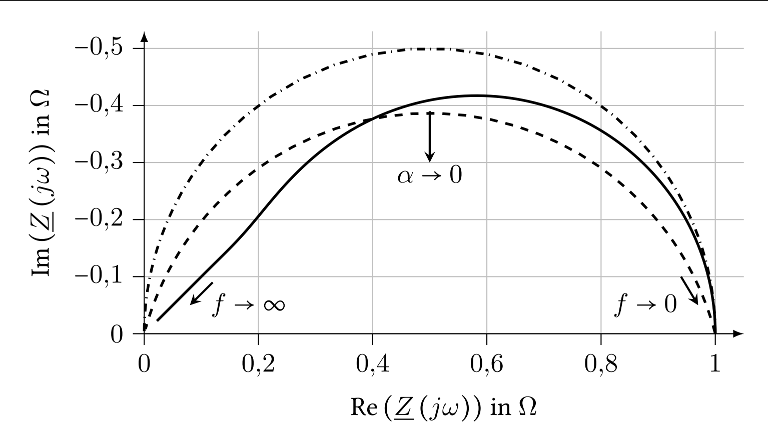


Abbildung 2.2: Vergleich des Impedanzverlaufs eines FLWs, eines RQ-Glieds und eines RC-Glieds

2.1.3 Fraktionales Impedanzmodell einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

In diesem Abschnitt wird ein fraktionales Modell zur Beschreibung der Impedanz einer Lithium-Ionen-Batteriezelle[11] eingeführt.

Die Impedanz einer Lithium-Ionen-Batteriezelle bildet sich aufgrund der innerhalb der Lithium-Ionen-Batteriezelle auftretenden Verlustprozesse (siehe Definition 2.3) aus und wird vor allem durch die sich überlagernde Diffusionsprozesse charakterisiert [Ill14, S. 76 ff.]. Die einzelnen

[11] Als nicht parametrische Methode hat sich die EIS zur Bestimmung der Impedanz einer Lithium-Ionen-Batteriezelle etabliert [Mac92], [BM05], [Ill14, S. 24], [Las14], die im Anhang A erläutert wird. Im Anhang A wird zudem ein Impedanzspektrum der in der Arbeit eingesetzten Lithium-Polymer (LiPO)-Batteriezelle dargestellt.

Diffusionsprozesse lassen sich mittels FLWen (2.18) elektrochemisch modellieren, wobei die Anzahl der notwendigen FLWen von dem eingesetzten Aktivmaterial abhängt [Ill14, S. 111 ff.]. An Stelle der elektrochemischen Beschreibungsform wird in dieser Arbeit ein fraktionale Modell verwendet, da einerseits sich das elektrochemische Modelle aufgrund ihrer Rechenintensität auf einem BMS nicht umsetzen lassen [SGL+18] [BMO+16]. Andererseits sind die Parameter des fraktionalen Modells elektrochemisch interpretierbar [Eck17, S. 18 ff.], da sich entsprechend Abschnitt 2.1.2 die einzelnen FLWe mittels RQ-Glieder (2.24) approximieren lassen und somit die RQ-Glieder den zugehörigen Diffusionsprozessen direkt zugeordnet werden können. Folglich liefern die Parameter R, Q, α des RQ-Glieds Informationen über den zugehörigen Diffusionsprozess [Eck17, S. 18 ff.], obwohl das RQ-Glied aus einer empirischen Modellierung hervorgeht.

Für das fraktionale Modell ist zu berücksichtigen, dass die in Definition 2.3 beschriebenen Verlustprozesse mehrere Diffusionsprozesse umfassen und daher durch mehrere RQ-Glieder beschrieben werden können [Ill14, S. 111 ff.] [Sch17, S. 24] [Sab15, S. 143 ff.]. Der niederfrequente Bereich wird durch das kapazitive Verhalten der Batteriezelle dominiert, das sich mittels einer differentiellen Kapazität [Sch17, S. 24], [HLL+18] modellieren lässt, die das Verhältnis einer kleinen Änderung der Ladungsmenge Q zur Änderung der OCV

$$C_{\mathrm{Diff}}\left(\mathrm{SOC}\right) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dOCV}\left(\mathrm{SOC}\right)} \tag{2.25}$$

für einen bestimmten SOC beschreibt. Das Ende des Impedanzspektrums im hochfrequenten Bereich hingegen bildet ein ohmscher Widerstand. Das allgemeine fraktionale Impedanzmodell einer Lithium-Ionen-Batteriezelle ist in der Definition 2.4 gegeben.

Definition 2.4 (Fraktionales Impedanzmodell einer Lithium-Ionen-Batteriezelle [Ill14, S. 151 ff.], [HLL+18])

Sei $M, N \in \mathbb{N}, \mathcal{I} := \{\, i \in \mathbb{N} |\, i \leq N \}, \mathcal{K} := \{\, k \in \mathbb{N} |\, k \leq M \}$, $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$, R_0, C_{Diff}, R_i, Q_i, R_k, $Q_k \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha_i, \alpha_k, \alpha \in (0, 1]$, $\underline{Z}_{\mathrm{LT}}, \underline{Z}_{\mathrm{Diff}} \in \mathbb{C}$ *und die komplexe Frequenz* $s \in \mathbb{C}$.
Die Impedanz einer Lithium-Ionen-Batteriezelle lässt sich im Kleinsignalbereich durch

$$\underline{Z}_{\mathrm{LIB}}\left(s\right) = R_0 + \underline{Z}_{\mathrm{LT}}\left(s\right) + \underline{Z}_{\mathrm{FD}}\left(s\right) + \frac{1}{s^{\alpha} C_{\mathrm{Diff}}} \tag{2.26}$$

mit dem ohmschen Widerstand R_0*, der Impedanz der Ladungstransferprozesse* $\underline{Z}_{\mathrm{LT}}$ *und der Festkörperdiffusionsprozesse* $\underline{Z}_{\mathrm{Diff}}$ *sowie der differentiellen Kapazität* C_{Diff} *modellieren. Durch Anwendung von* (2.24) *zur Beschreibung der Ladungstransferprozesse*

$$\underline{Z}_{\mathrm{LT}}\left(s\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i}{1 + R_i \left(sQ_i\right)^{\alpha_i}} \tag{2.27}$$

und der Festkörperdiffusionsprozesse

$$\underline{Z}_{\mathrm{FD}}\left(s\right) = \sum_{k=1}^{M} \frac{R_k}{1 + R_k \left(sQ_k\right)^{\alpha_k}} \tag{2.28}$$

ergibt sich das fraktionale Impedanzmodell. Durch die Summen in (2.27) *und* (2.28) *wird berücksichtigt, dass die Verlustprozesse aufgrund der Überlagerung einzelner Diffusionsprozesse mit Hilfe mehrerer RQ-Glieder approximiert werden können [Ill14, S. 111 ff.], [Sch17, S. 24], [Sab15, S. 143 ff.].*

Anzumerken ist, dass sich die Parameter R_0, R_i, Q_i, R_k, Q_k, C_{Diff}, α_i, α_k und α in (2.26), (2.27) und (2.28) abhängig vom SOC, der Temperatur und dem Alterungszustand ändern [Kup19, S. 55]. Wenn ein Batteriezelltyp hinreichend vermessen ist und somit der Einfluss der einzelnen Abhängigkeiten auf die Parameter bekannt ist, lassen unter Kenntnis des aktuellen SOCs und der Temperatur die Parameterwerte Rückschlüsse auf den Alterungszustand zu [SZK+14a], [SZK+14b].

Da Strom und Spannung im BMS kontinuierlich gemessen werden, bieten sich Zeitbereichsverfahren zur Bestimmung der Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Batteriemodells an, wofür ein Zeitbereichsmodell benötigt wird. Die Zeitbereichsdarstellung fraktionaler Systeme ist durch die fraktionale Differentialgleichung gegeben. Der Zusammenhang zwischen der fraktionalen Differentialgleichung und der Beschreibungsform im Frequenzbereich (2.26) stellt die Laplace-Transformation her [LH98, S. 46 ff.], [Eck17, S. 37]. Die allgemeine Beschreibungsform einer fraktionalen Differentialgleichung ist durch

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{D}^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathrm{D}^{\beta_k} u(t) \tag{2.29}$$

mit den Parametern a_i, $b_k \in \mathbb{R}$ und den Ableitungsordnungen α_i, $\beta_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Die Operatoren D^{α_i} und D^{α_i} stellen einen allgemeinen fraktionalen Differentialoperator mit der Ableitungsordnung α_i bezüglich des Ausgangssignal y beziehungsweise mit der Ableitungsordnung β_k des Eingangssignals u dar. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es eine Vielzahl an Definitionen für den fraktionalen Differentialoperator existiert [dTM14]. Die in dieser Arbeit verwendeten Operatoren und Notationen werden im Kapitel 3 eingeführt. Für die fraktionale Differentialgleichung gilt die Annahme, dass die Ableitungsordnungen entsprechend $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ sowie $\beta_0 < \cdots < \beta_m$ sortiert sind und $\alpha_n \geq \beta_m$ gilt. Aus den Parametern des Zeitbereichsmodells können die Parameter des fraktionalen Batteriemodells im Frequenzbereich bestimmt werden, die die elektrochemische Interpretierbarkeit besitzen.

Beispiel 2.1:

In diesem Beispiel wird die Rückrechnung der Parameter für ein Impedanzmodell (2.26) *mit* $N = 1$ *RQ-Gliedern zur Beschreibung des Ladungstransferprozesses und* $M = 0$ *RQ-Gliedern zur Beschreibung der Festkörperdiffusion demonstriert. Für das resultierende Impedanzmodell*

$$\begin{aligned} &R_{\text{LT}} Q_{\text{LT}} C_{\text{Diff}} \mathrm{D}^{\alpha_{\text{LT}}+\alpha_{\text{Diff}}} y(t) + C_{\text{Diff}} \mathrm{D}^{\alpha_{\text{Diff}}} y(t) = R_0 R_{\text{LT}} Q_{\text{LT}} C_{\text{Diff}} \mathrm{D}^{\alpha_{\text{LT}}+\alpha_{\text{Diff}}} u(t) + \\ &\quad (R_0 + R_{\text{LT}}) C_{\text{Diff}} \mathrm{D}^{\alpha_{\text{Diff}}} u(t) + R_{\text{LT}} Q_{\text{LT}} \mathrm{D}^{\alpha_{\text{LT}}} u(t) + u(t) \end{aligned} \tag{2.30}$$

können die Parameter aus einem Vergleich mit der allgemeinen Differentialgleichung (2.29)

$$a_3 \mathrm{D}^{\alpha_3} y(t) + a_2 \mathrm{D}^{\alpha_2} y(t) = b_3 \mathrm{D}^{\beta_3} u(t) + b_2 \mathrm{D}^{\beta_2} u(t) + b_1 \mathrm{D}^{\beta_1} u(t) + u(t) \tag{2.31}$$

bestimmt werden. Aus dem Vergleich folgt $\alpha_3 = \beta_3 = \alpha_{\mathrm{LT}} + \alpha_{\mathrm{Diff}}$. *Unter der Annahme, dass* $\alpha_{\mathrm{Diff}} > \alpha_{\mathrm{LT}}$ *für das Beispielsystem* (2.30) *gilt, lassen sich auch die Ableitungsordnungen* $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_{\mathrm{Diff}}$ *sowie* $\beta_1 = \alpha_{\mathrm{LT}}$ *und der Parameter* $a_2 = C_{\mathrm{Diff}}$ *direkt bestimmen. Die restlichen Parameter ergeben sich aus der Lösung des Gleichungssystems*

$$\begin{cases} R_{\mathrm{LT}} Q_{\mathrm{LT}} = \frac{a_3}{a_2} \\ R_0 R_{\mathrm{LT}} Q_{\mathrm{LT}} = \frac{b_3}{a_2} \\ R_0 + R_{\mathrm{LT}} = \frac{b_2}{a_2} \end{cases} \tag{2.32}$$

zu

$$\begin{cases} R_{\mathrm{LT}} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2 b_2} \\ Q_{\mathrm{LT}} = \frac{b_2^2}{a_3 b_2 - a_2 b_3} \\ R_0 = \frac{b_3}{b_2} \end{cases} . \tag{2.33}$$

2.2 Methoden zur Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen fraktionaler Systemen

Im vorherigen Abschnitt 2.1 wird ein fraktionales Impedanzmodell einer Lithium-Ionen-Batteriezelle eingeführt, dessen Parameter und Ableitungsordnungen sich alterungsbedingt und betriebsbedingt ändern [Ill14, S. 108 ff.], [SZK⁺14a]. Um einen sicheren Betrieb zu gewährleisten, müssen die Parameter und Ableitungsordnungen während der Batterienutzung identifiziert werden. In diesem Abschnitt wird betrachtet, inwieweit sich durch Methoden aus dem Stand der Wissenschaft zur Bestimmung die Parameter eines fraktionalen Modells a_i, b_k, α_i und β_k unter Berücksichtigung der in der Einleitung gestellten Anforderungen bezüglich der Verwendung von Messdaten und Unabhängigkeit von Anfangswertbedingungen eignen. Für die Messdaten gelten die beiden Annahmen, dass diese erstens als Zeitbereichsmessungen vorliegen und zweitens sich aus einer Überlagerung des ungestörten Systemsignals und Rauschen ergeben. Als zusätzlicher Punkt wird noch betrachtet, ob sich das jeweilige Identifikationsverfahren direkt auf das Zeitbereichsmodell (2.31) der Batteriezelle anwenden lässt.

2.2.1 Parameteridentifikation

In diesem Abschnitt werden Verfahren diskutiert, die die Parameter eines fraktionalen Systems identifizieren und die Annahme von bekannten Ableitungsordnungen α_i und β_k treffen. Die Verfahren lassen sich dabei in Frequenzbereichs- und Zeitbereichsverfahren unterteilen, die wiederum in approximative und nicht-approximative Verfahren gruppiert werden können (siehe Abbildung 2.3).

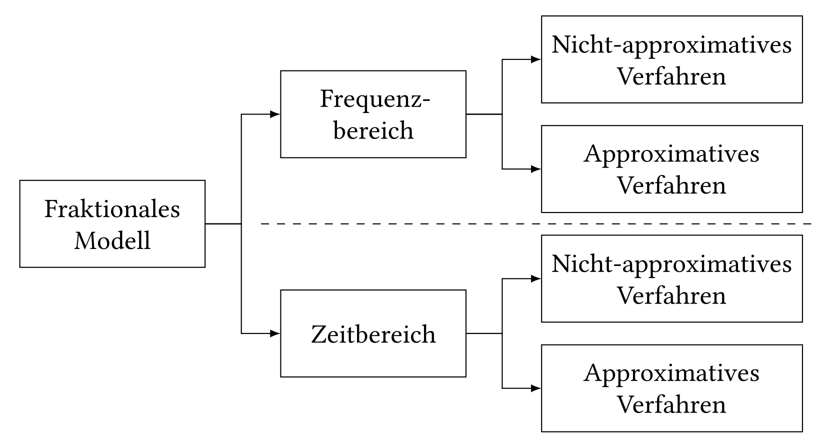


Abbildung 2.3: Überblick über Einteilung von Identifikationsverfahren für fraktionale Systeme

Frequenzbereichsverfahren

Für die Frequenzbereichsverfahren wird eine fraktionale Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k s^{\beta_k}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^{\alpha_i}} \tag{2.34}$$

zur Beschreibung des Systems eingesetzt. Die Parameteridentifikation erfolgt durch ein punktweisen Vergleich

$$E(a_i, b_k, h) = G_{\text{mess}}(j\omega_h) - G(a_i, b_k, j\omega_h) \tag{2.35}$$

des Frequenzgang der Übertragungsfunktion G (2.34) und eines gemessenen Frequenzgangs des Systems G_{mess}. Basierend auf (2.35) werden die Parameter in [HL03] mittels der Methode der kleinsten Quadrate[12] (LS-Methode), in [KMRM12] mit Hilfe eines optimierungsbasierten Ansatzes und in [VT15] durch den Einsatz von Intervallarithmetik identifiziert. In allen Ansätzen wird angenommen, dass der gemessene Frequenzgang bereits vorliegt. In der Praxis hat sich dafür die EIS (siehe Anhang A) etabliert. Mit Bezug auf die in der Einleitung formulierten Anforderungen für die Identifikationsverfahren wird zum einen die Anforderung (b) nicht erfüllt, da sich die Batterie für die EIS in Ruhe befinden muss. Da außerdem die Anregung für die EIS mit einem sinusförmigen Signal für unterschiedliche Frequenzen erfolgen muss [Ill14, S. 24 ff.], wird auch die Anforderung (c) von den Frequenzbereichsverfahren nicht erfüllt.

[12] engl. least squares

Approximative Verfahren

Approximative Verfahren nähern im ersten Schritt die fraktionalen Ableitungen in (2.29) durch ganzzahlige Ableitungen, sodass sich ein gewöhnliches System

$$\sum_{i=0}^{\hat{n}} \hat{a}_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{\hat{m}} \hat{b}_k u^{(k)}(t) \tag{2.36}$$

ergibt. Um eine Approximation mit nur einem geringen Fehler zu erhalten, wird im Allgemeinen eine größere Anzahl Parametern $\hat{n} > n$ und $\hat{m} > m$ benötigt, wodurch $\hat{a}_i \neq a_i$ und $\hat{b}_k \neq b_k$ gilt [OAZM21]. In Bezug auf die Impedanzmodellierung der Lithium-Ionen-Batteriezelle besteht der Nachteil darin, dass die elektrochemische Interpretierbarkeit der Parameter nicht mehr in den approximativen Beschreibungen gegeben ist und damit die in der Einleitung formulierte Anforderung (a) nicht erfüllt wird [Kup19, S. 12 f.]. Daher wird an dieser Stelle nicht näher auf die approximativen Ansätze eingegangen. Es sei lediglich auf einige Arbeiten Khadhraoui et al. [KJTM15], Lu et al. [LZT20], Lu et al. [LTZW20], Malti et al. [MVO08], Sabatier et al. [SAO+06], Tang et al. [TLW+15], Touil et al. [TLC19], Yakoub et al. [YACA15], Yakoub et al. [YAAC19] und Zhang et al. [ZTZZ21] verwiesen.

Parameteridentifikation durch Zustandsschätzer

Zur Parameteridentifikation sind einige Zustandsschätzverfahren für fraktionale Modelle so weiter entwickelt worden, dass eine Parameteridentifikation möglich ist [SD06], [Has08, S. 137 ff.], [WBG17]. Damit die Parameteridentifikation mittels der Zustandsschätzer erfolgen kann, dürfen sich die Parameter zwischen zwei Schätzschritten nicht ändern. Für die Parameteridentifikation wird der Zustandsvektor erweitert, weshalb ebenfalls die Systemrauschmatrix angepasst werden muss. Allerdings ist es nicht ausreichend, die Hauptdiagonalelemente anzupassen. Allgemein bestehen Abhängigkeiten zwischen den Parametern und den eigentlich zu schätzenden Zuständen. Da diese nicht analytisch angegeben werden können [SD06], [Has08, S. 143], muss diese Abhängigkeit durch Vorgabe der entsprechenden Nebendiagonalelemente in der Systemrauschmatrix berücksichtigt werden. Die Qualität der Parameterschätzung hängt von der heuristischen Wahl der Systemrauschmatrix ab [SD06]. Die Verfahren zur Parameteridentifikation durch Zustandsschätzer konzentrieren sich dabei auf in Ruhe befindliche Systeme, sodass die in der Einleitung formulierte Anforderung (b), die Unabhängigkeit von den Anfangswertbedingungen, nicht erfüllt wird.

Stochastische Verfahren

Ein Alleinstellungsmerkmal des in [CTM+13] vorgestellten stochastischen Verfahren ist, dass ein rauschbehaftetes Eingangssignal zugelassen wird. Sowohl für das Ein- als auch das Ausgangsrauschen wird eine symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angenommen. Für eine symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verschwindet die Kumulante dritter Ordnung[13]. Diese Tatsache wird in [CTM+13] ausgenutzt. Anstelle der ursprünglichen Ein-

[13] Sei $\{x(t_k)\}$ ein reelwertiger, mittelwertfreier, stationärer Zufallsprozess. Die Kumulante dritter Ordnung ist für $\{x(t_k)\}$ wie folgt definiert: $C_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{E}\{x(t_k)\, x(t_k + \tau_1)\, x(t_k + \tau_2)\}$ mit dem Erwartungswert E.

und Ausgangssignale werden Kumulanten dritter Ordnung beider Signale in der fraktionalen Differentialgleichung verwendet, wodurch der Rauscheinfluss eliminiert wird. Die Parameteridentifikation erfolgt mittels der LS-Methode.

Dass neben dem Ausgangssignal ebenfalls das Eingangssignal verrauscht sein darf, ist mit Blick auf die praktischen Anwendbarkeit vorteilhaft. Allerdings muss das rauschfreie Eingangssignal ein mittelwertfreier stationärer stochastischer Prozess sein. In der Regel wird ein System im Betrieb nicht mit einem solchen Signal angeregt, sodass für die Identifikation vorhandene Messdaten nicht verwendet werden können. Ebenfalls wird als Anfangsbedingung gestellt, dass sich das System zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindet. Dadurch erfüllt dieses Verfahren die Anforderungen (b) und (c) aus der Einleitung nicht.

Algebraische Methode

Die algebraische Methode basiert auf der Operatorenrechnung nach Mikusiński [Mik57]. Diese Methode wurde in [Geh15] erstmalig vorgestellt und in [Eck17, S. 63 ff.] formal bewiesen. Die Anwendung der Operatorenrechnung nach Mikusiński auf die fraktionale Differentialgleichung (2.29) ergibt die algebraische Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathfrak{s}^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathfrak{s}^{\beta_k} u(t), \tag{2.37}$$

wobei $\mathfrak{s}$ den Differentialoperator nach Mikusiński[14] repräsentiert. Durch wiederholte Differentiation von (2.37) nach dem Differentialoperator $\mathfrak{s}$ ergibt sich eine Gleichung, in der sowohl die Parameter als auch die Ableitungsordnungen als gewöhnliche Parameter vorkommen [Eck17, S. 66]. Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist nur noch abhängig von dem Ein- und Ausgangssignal und deren ganzzahligen Ableitungen. Durch Anwendung des Integrationsoperators ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das für die Parameteridentifikation gelöst werden muss.

Der Vorteil dieser Methode ist, dass keine fraktionale Integration oder Differentiation angewendet werden muss und die Ableitungsordnungen direkt als Parameter mitbestimmt werden. Allerdings entstehen durch die wiederholte Differentiation nichtlineare Zusammenhänge der ursprünglichen Parameter a_i und b_k sowie Ableitungsordnungen α_i und β_k. Für die Identifikation werden die nichtlinearen Zusammenhänge als Ersatzparameter interpretiert. Dies macht eine Rückrechnung auf die ursprünglichen Größen notwendig, die aufgrund der Nichtlinearität jedoch nicht eindeutig sein muss. Da sich die Parameter aus dem Lösen einer charakteristischen Gleichung ergeben, in die sämtliche Ableitungen des Ausgangssignals eingehen, kann bereits ein geringer Rauscheinfluss zu einem inkorrekt gestellten Problem führen[15]. Darüber hinaus ist diese Methode nur für in Ruhe befindliche Systeme einsetzbar, sodass die eingangs formulierten Anforderungen (b) und (c) von dem algebraischen Ansatz nicht erfüllt werden.

[14] Die Differentiation wird als Operator aufgefasst und ist als Umkehrung des Integrationsoperators $\{1\} = \left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} / \{f(t)\}$ definiert, wobei $\{\}$ zur Kennzeichnung der Zeitfunktion verwendet wird [Mik57].

[15] In [Eck17, S. 84 ff.] wird für ein Simulationsbeispiel beschrieben, dass ab einem Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) kleiner 75 dB eine Parameteridentifikation nicht mehr möglich ist.

Optimierungsbasierte Verfahren

Die Grundlage der Klasse der optimierungsbasierten Verfahren bildet ein Gütemaß. Dieses wird als ein Vergleich von einer simulierten Größe und einer gemessenen Größe in der Form

$$J(a_i, b_k) = \sum_{h=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{mess}}(t_h) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{sim}}(a_i, b_k, t_h)\right)^2 \tag{2.38}$$

gebildet, wobei $\boldsymbol{x}_{\mathrm{mess}}$ entweder ein gemessenes Ausgangssignal oder Zustand und $\boldsymbol{x}_{\mathrm{sim}}$ die zugehörige Simulationsgröße ist. Diese beiden Größen $\boldsymbol{x}_{\mathrm{mess}}$ und $\boldsymbol{x}_{\mathrm{sim}}$ werden an insgesamt N unterschiedlichen, diskreten Zeitpunkten t_h verglichen. Das Ziel der Verfahren ist die Minimierung des aufgestellten Gütemaßes über die Parameter a_i und b_k

$$\min_{a_i, b_k} J(a_i, b_k), \tag{2.39}$$

sodass die simulierte Größe $\boldsymbol{x}_{\mathrm{sim}}$ möglichst gut die Messgröße $\boldsymbol{x}_{\mathrm{mess}}$ abbildet. Die Ansätze unterscheiden sich primär in dem gewählten Verfahren, um das Problem (2.39) zu lösen. Eingesetzte Verfahren sind unter anderem das Gauß-Newton-Verfahren [Ahm20], [CWC+17], [FAI18], [VMGO13], das Verfahren nach Levenberg-Marquardt [NEHGP18], die differentielle Evolution [DMTT17] und die Partikelschwarm-Optimierung [HLL+18], [LB11].

Die vorgeschlagenen Ansätze zur Lösung des formulierten Optimierungsproblems sind iterative Verfahren, weshalb für die erste Iteration Anfangswerte benötigt werden. Bei fast allen vorgeschlagenen Verfahren handelt es sich um lokal konvergente Verfahren, bei denen das gefundene Optimum von den gewählten Anfangswerten abhängt. Bei den lokal konvergenten Verfahren muss das gefundene Optimum nicht dem globalen Optimum des formulierten Problems entsprechen. Einzige Ausnahme bilden die auf der Partikelschwarm-Optimierung basierenden Ansätze, die auf Kosten der Rechenzeit eine globale Konvergenz sicherstellen können [HLL+18]. Wie bei den bisherigen Verfahren wird auch von den optimierungsbasierten Verfahren die Anforderung (b) nicht erfüllt, da sämtliche Verfahren ein in Ruhe befindliches System zu Beginn der Identifikation annehmen.

Modulationsfunktionsverfahren

Das Modulationsfunktionsverfahren geht zurück auf [Shi54] und findet vielfach Anwendung für fraktionale Systeme [ALL14], [ALL15], [EKH14], [Eck17], [Gao17], [GLZ18], [LLGP13], [WLB+17]. Dabei wird aus den Messdaten ein Gleichungssystem, das linear in den Parametern a_i und b_k ist, hergeleitet. Dieses kann anschließend zum Beispiel mit der LS-Methode gelöst werden. Die Besonderheit ist, dass zur Erzeugung der Gleichungen nicht die Messdaten von einem Zeitpunkt t_h, sondern von einem Intervall $[t_0, t_1]$ herangezogen werden. Der erste Schritt im Modulationsfunktionsverfahren ist, dass die fraktionale Differentialgleichung (2.29) mit einer Modulationsfunktion γ multipliziert wird. Die Modulationsfunktionen besitzen die beiden folgenden Eigenschaften[16]:

[16] Eine formale Definition wird im Abschnitt 3.3.1 gegeben.

(i) Die Funktion γ ist $\lceil \alpha_n \rceil$-stetig auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ differenzierbar sein und

(ii) die ganzzahligen Ableitungen $\gamma^{(i)}(t)$ verschwinden für $i = 0, 1, ..., \lceil \alpha_n \rceil$ an der Untergrenze des Intervalls $t = t_0$ sowie an der Obergrenze $t = t_1$.

Eine Übersicht über einige Modulationsfunktionen ist beispielsweise in [PR93a, S. 6] gegeben. Als zweiter Schritt wird das resultierende System nach der Multiplikation mit der Modulationsfunktion γ über das Intervall $[t_0, t_1]$ integriert. Mit Hilfe der fraktionalen partiellen Integration [Eck17, S. 48 ff.] wird die Differentiation der Messsignale auf die Modulationsfunktion übertragen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, \mathrm{D}^{\alpha_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m} b_k \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, \mathrm{D}^{\beta_k} \gamma(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.40}$$

Durch unterschiedliche Anregungssignale, Messzeitpunkte oder Modulationsfunktionen γ können linear unabhängige Gleichungen erzeugt werden, um ein Gleichungssystem für die Identifikation aufzustellen[17].

In Bezug auf die praktische Einsetzbarkeit ist hervorzuheben, dass nicht die verrauschten Messsignale, sondern die bis auf die beiden Eigenschaften (i) und (ii) beliebig vorgebbare Modulationsfunktion abgeleitet wird. Außerdem wurde in [LLGP13] gezeigt, dass ein unbekannter Bias in der Messung eliminiert wird, sofern das Integral im Intervall $[t_0, t_1]$ über die Modulationsfunktion und deren Ableitungen verschwindet. Nachteilig ist, dass die Modulationsfunktion abhängig der Ableitungsordnungen und auftretenden Zeitkonstanten heuristisch an jedes System separat angepasst werden muss [Eck17, S. 27]. Im Rahmen dieser Arbeit ist auch der Beitrag [SEMH21] entstanden, in dem ein Verfahren zur automatischen Bestimmung einer Modulationsfunktion vorgestellt wird, sodass die Anpassung für die Parameteridentifikation hinfällig wird. Dieser Ansatz beschränkt sich jedoch auf kommensurable fraktionale Systeme, deren Ableitungen sich durch $\alpha_i = i\alpha$ und $\beta_k = k\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreiben lassen. Dadurch ist das Verfahren auf das Zeitbereichsmodell (2.31) der Batteriezelle nicht anwendbar. Bezogen auf die in der Einleitung formulierten Anforderungen an das Parameteridentifikationsverfahren wird für die Anwendung des Modulationsfunktionsverfahren ebenfalls ein in Ruhe befindliches System gefordert, wodurch die Anforderung (b), die Unabhängigkeit von Anfangswertbedingungen, nicht erfüllt ist.

2.2.2 Ableitungsordnungsidentifikation

In diesem Abschnitt werden Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation vorgestellt. Die meisten Verfahren treffen die Annahme, dass die Parameter ebenfalls unbekannt sind und identifiziert werden müssen. Wie bei der Parameteridentifikation können die Verfahren in Frequenz- und Zeitbereichsverfahren unterteilt werden (siehe Abbildung 2.3). Eine Unterteilung in approximative und nicht-approximative Verfahren ist nicht zielführend, da durch die Approximation die zu identifizierende Ableitungsordnung α_i und β_k nicht mehr in den betrachteten Systemen (2.36) vorkommt [KJTM15], [LZT20], [SAO⁺06], [TLW⁺15]. Zudem widerspricht die Approximation der Anforderung (a) aus der Einleitung.

[17] Das Vorgehen wird detailliert im Abschnitt 3.3.2 beschrieben.

Frequenzbereichsverfahren

Zur Ableitungsordnungsbestimmung wird in den beiden Ansätzen von Valério und Tejado [VT15] sowie Khemane et al. [KMRM12] beim punktweisen Vergleich (2.35) des gemessenen und des simulierten Frequenzgangs

$$E\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k, h\right) = G_{\text{mess}}\left(j\omega_h\right) - G\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k, j\omega_h\right) \tag{2.41}$$

ebenfalls die Ableitungsordnungen als Freiheitsgrad betrachtet. Allerdings bleibt die Annahme bestehen, dass die gemessenen Frequenzgänge G_{mess} bekannt sind. Folglich erfüllen die Frequenzbereichsverfahren wie bei der Parameteridentifikation auch für die Ableitungsordnungsidentifikation die in der Einleitung formulierten Anforderungen (b) und (c) nicht.

Analytischer Ansatz

Ein analytischer Ansatz wird in [DLMA17] verfolgt. Dieser ist jedoch auf die Klasse fraktionaler Differentialgleichungen

$$\mathrm{D}^{2\beta} u\left(t\right) + b_1 \mathrm{D}^{\beta} u\left(t\right) + b_0 u\left(t\right) = 0 \tag{2.42}$$

beschränkt. Da die Einschränkung sehr restriktiv ist und eine Abbildung einer Batteriezelle (2.31) mit der Klasse (2.42) nicht möglich ist, wird dieser Ansatz in der Arbeit nicht näher betrachtet.

Ableitungsordnungsidentifikation durch Zustandsschätzer

Die Schätzverfahren für den Ladezustand [SD06], [Has08, S. 137 ff.], [WBG17] lassen sich wie bei der Parameteridentifikation auch für die Ableitungsordnungsidentifikation erweitern. Wie bei der Parameteridentifikation hängt die Identifikationsgüte maßgeblich von der vorgebbaren Systemrauschmatrix ab. Da die Ableitungsordnungen Einfluss auf die zu schätzenden Zustandsgrößen besitzen [SD06], sind auch die entsprechenden Nebendiagonalelemente der Systemrauschmatrix, die die Ableitungsordnungen mit den Zuständen verknüpfen, anzupassen. Da sich das Verfahren gegenüber der Parameterschätzung nicht geändert hat, erfüllen die erweiterten Schätzungen ebenfalls die Anforderung (b) nicht.

Algebraische Methode

Ein Vorteil der im Abschnitt 2.2.1 vorgestellten algebraischen Methode ist, dass diese neben den Parametern ebenfalls die Ableitungsordnungen direkt mit identifiziert [Eck17, S. 63 ff.], [Geh15]. Da es sich um die gleiche Methode handelt, wird auch für die Ableitungsordnungsidentifikation die beiden Anforderungen (b) und (c) nicht erfüllt.

Optimierungsbasierte Verfahren

Wie bei der Parameteridentifikation liegt der Klasse der optimierungsbasierten Verfahren zur Bestimmung der Ableitungsordnungen quadratische Gütemaße zugrunde. Im Gegensatz zu den Parameteridentifikationsverfahren ist die Vergleichsgröße stets das Ausgangssignal. Die optimierungsbasierten Ansätze lassen sich in zwei Gruppen unterteilen. In der ersten Gruppe werden die Parameter und die Ableitungsordnungen simultan bestimmt. Dafür wird in [Ahm20], [FAI18], [DMTT17], [HLL+18] ein Gütemaß

$$J\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k\right) = \sum_{h=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}_{\text{mess}}\left(t_h\right) - \boldsymbol{y}_{\text{sim}}\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k, t_h\right)\right)^2 \tag{2.43}$$

mit dem gemessenen und simulierten Ausgangssignal y_{mess} und y_{sim} entsprechend (2.38) genutzt, in dem das gemessene und das simulierte Ausgangssignal an diskreten Zeitpunkten t_h verglichen werden. In [RPJ13] wird das Gütemaß

$$J\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k\right) = \int_0^t \left(y_{\text{mess}}\left(\tau\right) - y_{\text{sim}}\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k, \tau\right)\right)^2 \mathrm{d}\tau \tag{2.44}$$

verwendet, in dem das gemessene und das simulierte Ausgangssignal y_{mess} und y_{sim} kontinuierlich im Intervall $[0, t]$ verglichen wird. Unabhängig davon erfolgt die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation über die Minimierung des gewählten Gütemaßes

$$\min_{a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k} J\left(a_i, b_k, \alpha_i, \beta_k\right). \tag{2.45}$$

Der Hauptunterschied besteht in den eingesetzten Lösungsalgorithmen. In [Ahm20], [FAI18], [RPJ13], [YAAC19] wird das Gauß-Newton Verfahren, in [DMTT17] die Differential Evolution und in [HLL+18] die Partikelschwarm-Optimierung angewendet.

Die Verfahren in der zweiten Gruppe bestimmen in einem iterativen Prozess die Parameter und die Ableitungsordnungen [VMGO13], [YAAC19]. Dabei werden abwechselnd die Parameter und Ableitungsordnungen in Abhängigkeit der jeweils anderen Größe bestimmt. Die Bestimmung der Ableitungsordnungen erfolgt durch Minimierung des Gütemaßes

$$J\left(\alpha_i, \beta_k\right) = \sum_{h=1}^{N} \left(\boldsymbol{y}_{\text{mess}}\left(t_h\right) - \boldsymbol{y}_{\text{sim}}\left(\alpha_i, \beta_k, t_h\right)\right)^2 \tag{2.46}$$

bezüglich der Ableitungsordnungen α_i und β_k. Für die Parameteridentifikation wird ebenfalls ein optimierungsbasiertes Verfahren sowohl in Victor et al. [VMGO13] und in Yakoub et al. [YAAC19] eingesetzt. Der Vorteil der ersten Gruppe ist, dass die Konvergenz des formulierten Problems untersucht werden kann. Bei der zweiten Gruppe kann dagegen nur für die beiden einzelnen Optimierungsprobleme die Konvergenz gezeigt werden. Für die gemeinsame Konvergenz wird auf Simulationsergebnisse verwiesen.

Wie im Zusammenhang bei der Formulierung der allgemeinen Differentialgleichung (2.29) erwähnt, existiert eine Vielzahl an Definitionen für den fraktionalen Differentialoperator [dTM14]. Die Ableitung des Differentialoperators nach der Ableitungsordnung $\partial \mathrm{D}^{\alpha}/\partial \alpha$ wird für die gradientbasierten Verfahren in [Ahm20], [FAI18], [RPJ13], [VMGO13] benötigt. Dieser weist jedoch für die gewählte Definition von Riemann-Liouville in den ersten drei Ansätzen aufgrund

des Ausdrucks $\ln(t-\tau)$ mit $\tau \in [t, t_1]$ an der Untergrenze des Intervalls $\tau = t$ eine Singularität auf. In [VMGO13] wird der Gradient basierend auf der Übertragungsfunktion (2.34) bestimmt, wodurch der natürliche Logarithmus $\ln(s)$ der komplexen Frequenz s für $\mathrm{Re}(s) \in [0, \infty)$ berechnet werden muss. Wie bei den anderen Ansätzen tritt damit an der Untergrenze des Intervalls $s = 0$ eine Singularität auf. Die auftretenden Singularitäten werden jedoch in keinem Ansatz analysiert. Bei den in [DMTT17], [HLL+18] gewählten Algorithmen besteht der Nachteil, dass diese sehr rechenintensiv sind und der Rechenaufwand stark mit zunehmender Anzahl an Variablen ansteigt. Aus diesem Grund muss für eine akzeptable Rechenzeit der Algorithmus auf einem performanten Rechner ausgeführt werden [ADH+11], weshalb die beiden Ansätze die Anforderung (c) aus der Einleitung nicht erfüllen. Darüber hinaus fordern alle Ansätze ein zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindliches System, wodurch die Anforderung (b) nicht erfüllt wird.

Modulationsfunktionsverfahren

Ausgehend von der Gleichung (2.40), die dem Modulationsfunktionsverfahren zugrunde liegt, ist in [ALL14], [ALL15], [BL15], [BL18] ein iterativer Ansatz zur Bestimmung der Parameter sowie der Ableitungsordnungen entwickelt worden, wobei die Verfahren auf Systeme der Klasse

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{D}^{\alpha_i} y(t) = u(t) \tag{2.47}$$

mit $\alpha_0 = 0$ beschränkt sind. In jeder Iteration wird als erster Schritt die Parameteridentifikation gemäß Abschnitt 2.2.1 durchgeführt. Die dafür notwendigen Ableitungsordnungen werden für die erste Iteration vorgegeben und ab der zweiten Iteration im Anschluss an die Parameteridentifikation bestimmt. Zur Ableitungsordnungsbestimmung wird (2.40) als nichtlineare Gleichung in Abhängigkeit der Ableitungsordnungen

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{\theta}) \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, \mathrm{D}^{\alpha_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, \gamma(t)\, \mathrm{d}t \tag{2.48}$$

mit $\boldsymbol{\theta} := [\alpha_n, \ldots, \alpha_1]^\top$ aufgefasst. Für die realen Parameter und Ableitungsordnungen des Systems muss (2.48) zu Null werden. Dadurch lässt sich die Ableitungsordnungsidentifikation als Nullstellensuche formulieren, für die das Newton-Verfahren angewendet wird.

Der auch bei der Parameteridentifikation auftretende Vorteil, dass die Modulationsfunktion und nicht das verrauschte Messsignal abgeleitet wird, bleibt für die Bestimmung der Ableitungsordnung bestehen. Allerdings wird durch die Einschränkung der Modellklasse auf (2.47) auch die Anzahl der Systeme reduziert, auf die diese Verfahren angewendet werden können. Unter anderem können die Verfahren nicht zur Ableitungsordnungsbestimmung eines fraktionalen Impedanzmodells einer Lithium-Ionen-Batteriezelle (2.26) eingesetzt werden, da das Zeitbereichsmodell (2.30) sowohl Ableitungen des Eingangssignals besitzt als auch Integrationsverhalten durch $\alpha_0 \neq 0$ aufweist. Eine direkte Erweiterung auf allgemeine fraktionale Differentialgleichungen (2.29) ist nicht möglich, da die in [ALL14], [ALL15], [BL15], [BL18] formulierten Lösungsansätze zur Nullstellensuche einen von der Ableitungsordnung unabhängigen Term benötigen. Dieses bedeutet, dass mindestens eine der beiden Ableitungsordnungen

α_0 und β_0 Null sein muss. Wie bei den gradientenbasierten Verfahren [Ahm20], [FAI18], [RPJ13], [VMGO13] zuvor wird die Ableitung des Differentialoperators $\partial \mathrm{D}^\alpha / \partial \alpha$ für die Ansätze in [ALL14], [ALL15], [BL15], [BL18] benötigt. Da ebenfalls die Definition des Differentialoperators von Riemann-Liouville gewählt wurde, tritt dieselbe Singularität an der Untergrenze des Intervalls $\tau = t$ auf, die auch bei diesen Ansätzen nicht weiter untersucht wird. Eine weitere Annahme in den Ansätzen [BL15], [BL18] kann zu einer mit Nullen besetzten Zeile in der Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens führen. In Bezug auf die in der Einleitung formulierten Anforderungen ist darüber hinaus anzumerken, dass in allen Ansätzen ein kontinuierlicher Ableitungsoperator gewählt wird. Dadurch ist eine direkte Implementierung nicht möglich und die Anforderung (c) nicht erfüllt. Weiterhin wird auch die Anforderung (b) verletzt, da sich das System zu Beginn der Identifikation in Ruhe befinden muss.

2.3 Bewertung des Stands der Wissenschaft und Spezifizierung der Forschungslücke

In diesem Abschnitt wird der Stand der Wissenschaft der Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikationsverfahren aus Abschnitt 2.2 in Bezug auf die in der Einleitung gestellten Forschungsfrage bewertet, die die für die Praxis relevanten Anforderungen

(a) Sicherstellung der elektrochemischen Interpretierbarkeit der Parameter und Ableitungsordnungen in Bezug auf die Lithium-Ionen-Batteriezelle,
(b) Unabhängigkeit von spezifischen Anfangswertbedingungen,
(c) Nutzung bereits vorhandener Messdaten und
(d) Implementierbarkeit auf einem Digitalrechner

berücksichtigt.

Die Anforderung (a) schließt die approximativen Verfahren aus, da durch die Approximation der Parameter und der Ableitungsordnungen die elektrochemische Interpretierbarkeit verloren geht. Die elektrochemische Interpretierbarkeit, die durch die Zuordnung der Parameter und Ableitungsordnungen zu einzelnen Prozessen in der Lithium-Ionen-Batteriezelle sichergestellt werden kann, ist für die Beurteilung des Batteriezustands von entscheidender Bedeutung [Eck17, S. 23 ff.].

Bei der Betrachtung der im Abschnitt 2.2 vorgestellten Verfahren zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikatin vorgestellten Verfahren geht hervor, dass kein aktuell bekanntes Verfahren die Anforderung (b) erfüllt. Allen Verfahren ist gemein, dass diese ein sich zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindliches System fordern. Speziell bei der Anwendung der Identifikationsverfahren auf eine Batteriezelle ist dieses eine sehr restriktive Forderung. Damit eine Lithium-Ionen-Batteriezelle als in Ruhe gilt, müssen die Diffusionsprozesse abgeklungen sein, das mehrere Stunden dauern kann [Sch17, S. 133 ff.]. Das Entwickeln eines Verfahrens zur Parameteridentifikation und eines Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation für ein zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindliches System stellt somit die erste Forschungslücke dar.

Nachfolgend werden die Verfahren aus dem Abschnitt 2.2 bezüglich der Anforderung (c), dem Nutzen von vorhandenen Messdaten, analysiert. Damit die von einer Identifikationsmethode ermittelten Parameter und Ableitungsordnungen für etwaige nachgelagerte Prozesse verwertbar sind, müssen die Parameter und Ableitungsordnungen auch bei verrauschten Messungen fehlerfrei bestimmt werden. Da bereits ein geringer Einfluss durch Rauschen bei der algebraischen Methoden zu einem inkorrekt gestellten Problem führen kann [Eck17, S. 84 ff.], wird die algebraischen Methode aufgrund der Anforderung (c) im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet. Weiterhin wird das stochastische Verfahren nicht näher betrachtet, da dieses ein spezielles Anregungssignal benötigt und vorhandene Messdaten nicht genutzt werden können. Vielversprechend hingegen ist das Modulationsfunktionsverfahren. Dieses Verfahren profitiert davon, dass nicht die verrauschten Messdaten abgeleitet werden, stattdessen wird die vorgebbaren Modulationsfunktion γ differenziert. Trotzdem sind die mit der LS-Methode identifizierten Parameter durch das Rauschen biasbehaftet [GLZ18]. Zur Korrektur des Bias schätzen einige Ansätze den Einfluss des Rauschens, um nachträglich die Parameteridentifikation zu korrigieren [DWHW16], [GLZ18]. Allerdings wird nicht überprüft, ob der Bias durch die Korrektur tatsächlich eliminiert wird und somit die Parameter fehlerfrei bestimmt werden. Im Falle der Identifikation der Ableitungsordnung werden stets rauschfreie Ausgangssignale für die auf dem Modulationsfunktionsverfahren basierenden Ansätze angenommen, sodass gänzlich die Berücksichtigung von verrauschten Messdaten im Stand der Wissenschaft fehlt. Im Gegensatz dazu werden bei der überwiegenden Anzahl der optimierungsbasierten Ansätzen für die Parameteridentifikation genauso wie für die Ableitungsordnungsidentifikation verrauschte Messdaten zugelassen. Allerdings lassen die veröffentlichten Ergebnisse den Schluss zu, dass sowohl die Parameter als auch die Ableitungsordnungen bei Anwesenheit von Rauschen nicht fehlerfrei identifiziert werden. Jedoch wird der durch das Rauschen hervorgerufene Fehler nicht analysiert und keine Aussage bezüglich der Identifikationsgüte getroffen. Im Stand der Wissenschaft existiert somit weder ein Ansatz zur simultanen noch zur iterativen Parameter- und Ableitungsordnungsbestimmung bei verrauschten Messungen, die eine fehlerfreie Identifikation ermöglichen. Dieser Sachverhalt stellt die zweite Forschungslücke dar.

Einzig in den beiden Ansätze in [KMRM12] und in [TLC19] wird explizit eine numerische Umsetzung berücksichtigt, wodurch sich diese auf einem Digitalrechner realisieren lassen und der Anforderung (d) entsprechen. Allerdings ist das Verfahren von Khemane et al. [KMRM12] ein Frequenzbereichsverfahren und das Verfahren von Touil et al. [TLC19] basiert auf einem approximativen Ansatz. Für das Frequenzbereichsverfahren wird angenommen, dass der Frequenzgang zumindest als punktweise Messung vorliegt. In der Praxis muss dieser ermittelt werden, wofür sich die EIS in Bezug auf die Lithium-Ionen-Batteriezelle etabliert hat. Die EIS erfüllt jedoch die beiden Anforderungen (b) und (c) nicht. Gegenüber den Frequenzbereichsverfahren besitzen die Zeitbereichsverfahren den Vorteil, dass der im BMS erfasste Strom und die Spannung direkt verwendet werden können, und somit lediglich die Anforderung (b) nicht erfüllen. Wie bereits im Zusammenhang mit der Anforderung (a) beschrieben, werden approximative Verfahren in dieser Arbeit nicht betrachtet, da die Parameter nicht elektrochemisch interpretierbar sind. Somit ist die dritte Forschungslücke, dass kein nicht-approximatives Zeitbereichsverfahren zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation existiert, das eine numerische Umsetzung berücksichtigt.

Basierend auf dem im vorherigen Abschnitten 2.1 und 2.2 gegebenen Überblick über fraktionale Systeme und dem Stand der Wissenschaft der Identifikationsverfahren kann die initiale Forschungsfrage präzisiert und in zwei Teilfragen aufgeteilt werden:

Wie lassen sich die Parameter eines fraktionalen Systems unter der Annahme bekannter Ableitungsordnungen erwartungstreu identifizieren, wenn

- *das System zu Beginn der Parameteridentifikation nicht in Ruhe ist und*
- *das Ausgangssignal als verrauschte Messgröße vorliegt und*

was muss für eine numerische Umsetzung des Parameteridentifikationsverfahrens berücksichtigt werden?

Wie können die Parameter und Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems gemeinsam identifiziert werden, wenn

- *das System zu Beginn der Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation nicht in Ruhe ist und*
- *das Ausgangssignal als verrauschte Messgröße vorliegt und*

was muss für eine numerische Umsetzung des gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikationsverfahrens berücksichtigt werden?

3 Methodische Grundlagen und Notation

In diesem Abschnitt werden die für diese Arbeit relevanten methodischen Grundlagen und Notationen präsentiert. Dafür werden zuerst die Grundlagen der fraktionalen Analysis und der fraktionalen Systemdarstellung beschrieben. Anschließend wird auf die Simulation eines fraktionalen Systems und das Modulationsfunktionsverfahren für fraktionale Systeme eingegangen, auf die die in dieser Arbeit entwickelten Methoden aufbauen.

3.1 Fraktionale Analysis

Die fraktionale Analysis besitzt die Besonderheit, dass reelle Integrations- und Ableitungsordnungen zulässig sind. Somit stellt die fraktionale Analysis eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Analysis dar. Als Erstes wird die fraktionale Integration im Abschnitt 3.1.1 eingeführt, da diese die Grundlage für die Definitionen der fraktionalen Ableitungen bildet, die im Abschnitt 3.1.2 präsentiert werden. Aus der Verwendung reellwertiger Integrations- und Ableitungsordnungen folgt, dass für die Berechnung des aktuellen Funktionswerts der gesamte vergangene Funktionsverlauf berücksichtigt werden muss. Der vergangene Verlauf wird dabei durch die Initialisierungsfunktion beschrieben, die Gegenstand des Abschnitts 3.1.3 sind. Da weit zurückliegende Werte nur noch einen geringen Einfluss auf den aktuellen Funktionswert besitzen, ist das Short-Memory[18]-Prinzip (SMP) eingeführt worden [Pod98, S. 199 ff.], [WCCW17], auf das ebenfalls in den Grundlagen im Abschnitt 3.1.4 eingegangen wird. Für das Modulationsfunktionsverfahren ist zudem die fraktionale partielle Integration notwendig, deren Beschreibung im Abschnitt 3.1.5 folgt. Abschließend werden noch die partiellen Ableitungen der fraktionalen Ableitung im Abschnitt 3.1.6 eingeführt, die im Rahmen der Herleitung der Verfahren zur Ableitungsordnung benötigt werden. Falls es nicht anders angegeben ist, beziehen sich die folgenden Ausführungen auf [Eck17], [LH98], [Pod98].

3.1.1 Fraktionale Integration

Die fraktionale Integration stellt eine Verallgemeinerung der Cauchy-Formel für Mehrfachintegration

$$ {}_{t_0}i_t^n f(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_n \ldots \mathrm{d}\tau_2 \mathrm{d}\tau_1 \tag{3.1} $$

$$ = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} \mathrm{d}\tau \tag{3.2} $$

[18] engl. für Kurzzeitspeicher

dar, mit der die n-fache Integration einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ am Punkt t berechnet werden kann [OS06, S. 38]. Für die Fakultät gilt allgemein der Zusammenhang $(n-1)! = \Gamma(n)$ zur Gamma-Funktion Γ [Pod98, S. 1 ff.]. Im Gegensatz zur Fakultät ist die Gamma-Funktion ebenfalls für die Menge der reellen Zahlen definiert. Das Ersetzen der Fakultät in (3.2) durch die Gamma-Funktion Γ ermöglicht somit eine natürliche Erweiterung von (3.2) auf reelle Integrationsordnungen $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition 3.1 (Fraktionales Integral [KST06, S. 69])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktionen.
Das linksseitige fraktionale Integral ist definiert als

$$ {}_{t_0}i_t^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

und das rechtsseitige fraktionale Integral als

$$ {}_{t}i_{t_1}^{\alpha} h(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{t_1} \frac{h(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \tag{3.4}$$

mit der Gamma-Funktion Γ [Pod98, S. 1 ff.].

Bei der Notation in (3.1) und der Definition 3.1, die aus [Eck17], [KST06], [Pod98], [PAT13] übernommen ist, wird die Untergrenze des Integrals im Index unten links, die Obergrenze im Index unten rechts und die Integrationsordnung im Index oben rechts angegeben.

3.1.2 Fraktionale Differentiation

Im Gegensatz zur fraktionalen Integration existieren verschiedene Definitionen für die fraktionale Differentiation. In diesem Abschnitt werden die Definitionen der fraktionalen Differentiation nach Riemann-Liouville (RL) [KST06, S. 69 f.], Caputo (C) [KST06, S. 90 f.] und Grünwald-Letnikov (GL) [KST06, S. 121 f.] angegeben, die auch in der Arbeit eingesetzt werden. Diese Definitionen unterscheiden sich nicht nur in den Rechenvorschriften, sondern weisen auch Unterschiede in den Eigenschaften wie zum Beispiel im Definitionsbereich auf [dTM14]. Allgemein gilt jedoch, dass die abzuleitende Funktion f beziehungsweise h $\lceil\alpha\rceil$-fach stetig differenzierbar sein muss [KST06, S. 73, 92]. In der Arbeit wird die in der fraktionalen Analysis typischerweise eingesetzte Aufrundungsfunktion, die in der Definition 3.2 angegeben ist, verwendet.

Definition 3.2 (Auf- und Abrundungsfunktion [KST06, S. 73])
Die Aufrundungsfunktion bestimmt die zu $x \in \mathbb{R}$ echt größere ganze Zahl

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} | k > x\} \tag{3.5}$$

und die Abrundungsfunktion entsprechend die um Eins kleinere ganze Zahl

$$\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil - 1. \tag{3.6}$$

Fraktionale Ableitung nach Riemann-Liouville und Caputo

Die Definitionen nach Riemann-Liouville und Caputo setzen sich aus einer fraktionalen Integration nach Definition 3.1 und einer ganzzahligen Ableitung zusammen. Während bei der Definition nach Riemann-Liouville als Erstes die Funktion integriert und anschließend differenziert wird, ist die Reihenfolge in der Definition nach Caputo gerade umgekehrt.

Definition 3.3 (Fraktionale Ableitung nach Riemann-Liouville und Caputo [KST06, S. 70,90 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktionen. Ferner seien die Funktionen f und h $\lceil \alpha \rceil$-fache stetig differenzierbar.
Die linksseitige fraktionale Ableitungen nach Riemann-Liouville ist definiert als

$$_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha} f(t) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \left[{}_{t_0}i_t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f(t) \right] \tag{3.7}$$

und die fraktionale Ableitung nach Caputo als

$$_{t_0}\mathrm{d}C_t^{\alpha} f(t) := {}_{t_0}i_t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil \alpha \rceil} f(t) \right]. \tag{3.8}$$

Die rechtsseitige fraktionale Ableitung nach Riemann-Liouville ist definiert als

$$_{t}\mathrm{d}RL_{t_1}^{\alpha} h(t) := (-1)^{\lceil \alpha \rceil} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \left[{}_{t}i_{t_1}^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} h(t) \right] \tag{3.9}$$

und die fraktionale Ableitung nach Caputo als

$$_{t}\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha} h(t) := (-1)^{\lceil \alpha \rceil} {}_{t}i_{t_1}^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil \alpha \rceil} h(t) \right]. \tag{3.10}$$

Da die Definitionen der fraktionalen Ableitungen auf dem fraktionalen Integral basieren, werden die Integralgrenzen bei dem Ableitungsoperator entsprechend Abschnitt 3.1.1 unten links und rechts angegeben. Der obere rechte Index des Operators gibt die Ableitungsordnung an. Für die beiden Definitionen nach Riemann-Liouville (RL) und Caputo (C) existiert der folgende funktionale Zusammenhang [KST06, S. 91].

Lemma 3.1 (Zusammenhang der Definitionen nach Riemann-Liouville und Caputo [KST06, S. 92 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ und seien f und h absolut stetige Funktionen entsprechend Definition 3.3.
Der Zusammenhang für die linksseitigen Definitionen ist

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha} f(t) = {}_{t_0}\mathrm{d}C_t^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha} \left. \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^k \tag{3.11} $$

und für die rechtsseitigen Definitionen

$$ {}_{t}\mathrm{d}RL_{t_1}^{\alpha} f(t) = {}_{t}\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} {}_{t}\mathrm{d}RL_{t_1}^{\alpha} \left. \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right|_{t=t_1} (t_1 - t)^k . \tag{3.12} $$

Beweis:
Für den Beweis wird auf Kilbas et al. [KST06, S. 92 f.] verwiesen. □

Fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov

Die Definition nach Grünwald-Letnikov verallgemeinert den Differenzenquotienten n-ter Ordnung [Pod98, S. 43]

$$ f^{(n)}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} f(t - lT) \tag{3.13} $$

mit der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t < t_0$ und der Abtastzeit $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dafür wird ausgenutzt, dass sich der Binomialkoeffizient durch die Gamma-Funktion

$$ \binom{n}{l} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(n-l+1)} \tag{3.14} $$

beschreiben lässt und somit auch für reelle Werte n definiert ist [KST06, S. 26 f.].

Definition 3.4 (Fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov [KST06, S. 121])
Sei $\alpha, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ und seien f und h absolut stetige Funktionen entsprechend Definition 3.3.
Die linksseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist definiert als

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) := \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} f(t - lT) \tag{3.15} $$

und die rechtsseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov als

$$ {}_{t}\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t) := \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t + lT) \,. \tag{3.16} $$

Während in (3.13) der Binomialkoeffizient für $l > n$ stets Null ist und somit die Summandenanzahl gerade der Ableitungsordnung entspricht, ist dies für reelle Ableitungsordnungen allgemein nicht der Fall. Dadurch müssen alle Funktionswerte der Funktion f im Intervall $[t_0, t)$ beziehungsweise der Funktion h im Intervall $(t, t_1]$ vergleichbar zu den Definitionen nach Riemann-Liouville und Caputo berücksichtigt werden (siehe Definition 3.3). Die Abrundungsfunktion bei der Summenobergrenze ist notwendig, da abhängig von der Unabhängigen t und dem gewählten Abtastwert nicht zwangsweise eine ganze Zahl aus dem Quotienten $(t-t_0)/h$ beziehungsweise $(t_1-t)/h$ resultiert. Falls die $\lceil \alpha \rceil$-fach abgeleitete Funktion f beziehungsweise h im Intervall $[t_0, t)$ beziehungsweise $(t, t_1]$ integrierbar ist, entsprechen sich die Definitionen nach Riemann-Liouville und Grünwald-Letnikov [Pod98, S. 75 ff.].

Lemma 3.2 (Zusammenhang der Definitionen nach Riemann-Liouville und Grünwald-Letnikov [Pod98, S. 75 ff.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ und seien f und h absolut stetige Funktionen entsprechend Definition 3.3. Ferner sei die $\lceil \alpha \rceil$-fache Ableitung der Funktion f im Intervall $[t_0, t]$ und die $\lceil \alpha \rceil$-fache Ableitung der Funktion h im Intervall $[t, t_1]$ integrierbar.
Der Zusammenhang für die linksseitigen Definitionen ist

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}RL_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{t_0}\mathrm{d}GL_{t}^{\alpha} f(t) \tag{3.17} $$

und für die rechtsseitigen Definitionen

$$ {}_{t}\mathrm{d}RL_{t_1}^{\alpha} h(t) = {}_{t}\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t) \,. \tag{3.18} $$

Beweis:
Für den Beweis wird auf Podlubny [Pod98, S. 75 ff.] verwiesen. □

Zeidiskrete Approximation der Definition nach Grünwald-Letnikov

Die in den Definitionen 3.3 und 3.4 gegebenen Berechnungsvorschriften sind stetige Operatoren. Diese können somit nicht direkt auf einem auf einem Digitalrechner zur Simulation oder digitalen Signalverarbeitung angewendet werden. Eine zumindest approximative Umsetzung ist für die Definition 3.4 nach Grünwald-Letnikov möglich, wenn die Schrittweite $T \in \mathbb{R}_{>0}$ in (3.15) und (3.16) klein genug gewählt wird [Pod98, S. 204 ff.], [Xue17, S. 55].

Definition 3.5 (Zeitdiskrete Approximation der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov [Pod98, S. 204 ff.], [Xue17, S. 55])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t_0, t_1, t \in \mathbb{R}, t_0 < t < t_1, T \in \mathbb{R}_{>0}$ und seien f und h absolut stetige Funktionen entsprechend Definition 3.3.
Die zeitdiskrete, linksseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist definiert als

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) := \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} f(t - lT) + \mathcal{R} \tag{3.19} $$

und die zeitdiskrete, rechtsseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov als

$$ {}_{t}\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t) := \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t + lT) + \mathcal{R} \tag{3.20} $$

mit der festen Abtastzeit T und dem Restglied $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(T)$.

In der Definition 3.5 bezeichnet $\mathcal{O}$ das Landau-Symbol für lineares Wachstum, das in diesem Fall abhängig von der Abtastzeit T ist [Zei13, S. 249 f.].

Die in diesem Abschnitt gegebenen Definitionen der fraktionalen Ableitungsoperatoren nach Riemann-Liouville, Caputo und Grünwald-Letnikov hängen über verschiedene Beziehungen zusammen, die in den Lemmata 3.1 und 3.2 gegeben sind. Aus diesem Grund sind laut [Die10, S. 5 f.], [Xue17, S. 88 f.] die Definitionen für die praktische Anwendung nicht unterschiedlich zu behandeln. Die einzige Unterscheidung ist, dass zur Beschreibung von kontinuierlichen Modellen die Definitionen nach Riemann-Liouville und Caputo weit verbreitet sind, während hingegen die Definition nach Grünwald-Letnikov mit Blick auf eine numerische Umsetzung wegen der zeitdiskreten Approximation in Definition 3.5 eingesetzt wird [SLMO15, S. 277], [Xue17, S. 52 f.]. Damit kommt speziell der Definition nach Grünwald-Letnikov eine besondere Bedeutung mit Blick auf die in der Einleitung gestellten Anforderung (c) zu.

3.1.3 Initialisierung der fraktionalen Operatoren für Funktionen

In der fraktionalen Analysis bezeichnet eine korrekte Initialisierung, dass das Integral ${}_{t_1}i_t^{\alpha} f(t)$ ab dem Zeitpunkt $t = t_1$ mit $t_1 > t_0$ einer kontinuierlichen Fortsetzung des Integrals ${}_{t_0}i_t^{\alpha} f(t)$ entspricht, wobei für die Funktion $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$ gilt. In der klassischen Analysis hängen die Integrale über

$$ \int_{t_0}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(t_1) - F(t_0) = C \tag{3.21} $$

zusammen. Die Integrationskonstante C berechnet sich für die Funktion f zu $C = f(t_1)$ [LH00]. Damit der Verlauf des Integrals mit der Untergrenze t_1 identisch zu dem Integral mit der Untergrenze t_0 ist, muss lediglich der Funktionswert $f(t_1)$ addiert werden. Im Gegensatz

dazu wird für die Initialisierung der fraktionalen Integration eine zeitabhängige Initialisierungsfunktion benötigt, die den Funktionsverlauf des Intervalls $[t_0, t_1)$ auf $t \geq t_1$ abbildet [LH98], [LH00], [LH08]. Die obigen Erläuterungen entsprechen dem linksseitigen Fall und sind ebenfalls für den rechtsseitigen Fall gültig [Eck17, S. 31 f.].

Definition 3.6 (Initialisierung des fraktionalen Integrals [LH98, S. 18 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t_2, t_3, t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 < t < t_2 \leq t_3$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ und $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut stetige Funktionen. Das initialisierte linksseitige fraktionale Integral ist definiert als

$$ {}_{t_1}\mathrm{I}_t^{\alpha} f(t) := {}_{t_1}i_t^{\alpha} f(t) + \eta(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) \tag{3.22} $$

mit der Initialisierungsfunktion $\eta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$ \eta(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\xi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau, \tag{3.23} $$

sodass ${}_{t_1}\mathrm{I}_t^{\alpha} f(t) \equiv {}_{t_0}i_t^{\alpha} f(t)$ für $t \geq t_1$ gilt.

Das initialisierte rechtsseitige fraktionale Integral ist definiert als

$$ {}_{t}\mathrm{I}_{t_2}^{\alpha} h(t) := {}_{t}i_{t_2}^{\alpha} h(t) + \eta_{\mathrm{rs}}(\xi, \alpha, t_2, t_3, t) \tag{3.24} $$

mit der Initialisierungsfunktion $\eta_{\mathrm{rs}} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$ \eta_{\mathrm{rs}}(\xi, \alpha, t_2, t_3, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_3} \frac{\xi(\tau)}{(\tau - t)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau, \tag{3.25} $$

sodass ${}_{t}\mathrm{I}_{t_2}^{\alpha} h(t) \equiv {}_{t}i_{t_3}^{\alpha} h(t)$ für $t \leq t_2$ gilt.

Die Intervalle $[t_0, t_1)$ für die linksseitige Integration und $(t_2, t_3]$ für die rechtsseitige Integration werden als Historie oder Speicher der Funktion bezeichnet [LH98, S. 4, 77]. Da die fraktionalen Ableitungen nach Riemann-Liouville und Caputo auf der fraktionalen Integration basieren, hängen auch deren Verläufe von der Historie ab. Somit werden ebenfalls zeitabhängige Initialisierungsfunktionen zur korrekten Initialisierung der fraktionalen Ableitungen benötigt [LH98], [LH00], [LH08].

Definition 3.7 (Initialisierung der fraktionalen Ableitungen nach Riemann–Liouville, Caputo und Grünwald-Letnikov [LH98, S. 21 f.], [LH11], [Kup19, S. 36 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t_2, t_3, t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 < t < t_2 \leq t_3$ und seien f und h die absolut stetigen Funktionen entsprechend Definition 3.6.
Die initialisierte linksseitige fraktionale Ableitung ist definiert als

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t) := {}_{t_1}d_t^{\alpha} f(t) + \psi(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) \tag{3.26} $$

mit der Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, sodass ${}_{t_1}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t) \equiv {}_{t_0}d_t^{\alpha} f(t)$ für $t \geq t_1$ gilt.

Die initialisierte rechtsseitige fraktionale Ableitung ist definiert als

$$ {}_{t}\mathrm{D}_{t_2}^{\alpha} h(t) := {}_{t}d_{t_2}^{\alpha} h(t) + \psi_{\mathrm{rs}}(\xi, \alpha, t_2, t_3, t) \tag{3.27} $$

mit der Initialisierungsfunktion $\psi_{\mathrm{rs}} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, *sodass* ${}_{t}\mathrm{D}_{t_2}^{\alpha} h(t) \equiv {}_{t}d_{t_3}^{\alpha} h(t)$ $t \le t_2$ *gilt.*

In Definition 3.7 hängt der spezifische Operator $\mathrm{D}RL$, $\mathrm{D}C$ beziehungsweise $\mathrm{D}GL$ sowohl im links- als auch rechtsseitigen Fall davon ab, ob der uninitialisierte Operator nach Riemann-Liouville, Caputo oder Grünwald-Letnikov verwendet wird. Die Definitionen der einzelnen Initialisierungsfunktionen sind im Anhang B explizit gegeben.

3.1.4 Short-Memory-Prinzip für Funktionen

Aus den Definitionen 3.6 und 3.7 folgt, dass zur Berechnung des aktuellen Funktionswerts der Integration oder Ableitung entweder der gesamte Funktionsverlauf ab $t = t_0$ oder eine diesen Funktionsverlauf abbildende Initialisierungsfunktion notwendig ist. Mit fortschreitender Zeit vergrößert sich das zu berücksichtigende Intervall bei den Definitionen von Riemann-Liouville sowie Caputo und bei der Definition nach Grünwald-Letnikov steigt die Anzahl der Summanden. Dies ist natürlich auch bei Verwendung der zeitdiskreten Approximation des Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov entsprechend Definition 3.5 der Fall. Dadurch vergrößert sich mit jedem Abtastschritt sowohl der Speicherbedarf für die Berechnung eines neuen Funktionswerts als auch der Rechenaufwand [Xue17, S. 62].

Eine Methode, dem entgegenzuwirken, ist das SMP [Pod98, S. 203 ff.], [WCCW17]. Das SMP ist nicht auf eine spezielle Definition der fraktionalen Ableitung begrenzt. Mit Blick auf den praktischen Fokus der Arbeit konzentrieren sich die nachfolgenden Erläuterungen auf die Definition nach Grünwald-Letnikov. Nach der Definition 3.5 wird jeder zurückliegende Funktionswert durch den Binomialkoeffizienten gewichtet aufsummiert. Die Gewichtung nimmt mit größer werdender Zählvariablen ab und wird vernachlässigbar klein. Somit besitzen die jüngsten Funktionswerte den größten Einfluss auf den weiteren Verlauf der Ableitung. Die Approximation mittels dem SMP, die in der Definition 3.8 angegeben ist, berücksichtigt gerade die jüngeren Funktionswerte und vernachlässigt ältere Funktionswerte [WCCW17].

Definition 3.8 (Approximation der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov mit endlicher Speicherlänge [Xue17, S. 62])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}, t_0, t_1, t_2, t_3, t \in \mathbb{R}$, $t_0 \le t_1 < t < t_2 \le t_3$, $L \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}_{>0}$ *und seien* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(t) = 0$ *für* $t \le t_0$ *und* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(t) = 0$ *für* $t \ge t_1$ *absolut stetige Funktionen. Die linksseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov wird mit Hilfe des SMPs durch*

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) \approx {}_{t-LT}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) \tag{3.28} $$

und die rechtsseitige fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov durch

$$ {}_{t}\mathrm{d}GL_{t_3}^{\alpha} h(t) \approx {}_{t}\mathrm{d}GL_{t+LT}^{\alpha} h(t)\,. \tag{3.29} $$

mit einer endlichen Speicherlänge L, *der festen Abtastzeit* T *und* $t_0 < t_1 \le t - LT$ *sowie* $t_3 > t_2 \ge t + LT$ *approximiert.*

Da der Binomialkoeffizient nur für den Grenzwert $\lim_{l\to\infty}\binom{\alpha}{l} = 0$ verschwindet, ergibt sich stets ein Fehler. Eine obere Abschätzung des Fehlers für den linksseitigen Fall aus Definition 3.5 wird in [WCCW17] hergeleitet.

Lemma 3.3 (Fehlerobergrenze durch Anwendung einer endlichen Speicherlänge [WCCW17])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < t$, $L \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}_{>0}$, f eine absolut stetige Funktion entsprechend Definition 3.5 und es gilt

$$M = \sup_{t\in(t_0,t_1)} |f(t)|. \tag{3.30}$$

Der Fehler zwischen der linksseitigen fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov ohne SMP und mit SMP

$$e(t) := {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) - {}_{t-LT}\mathrm{d}GL_t^{\alpha} f(t) \tag{3.31}$$

besitzt die Obergrenze

$$|e(t)| \leq \frac{M}{L^{\alpha}|\Gamma(1-\alpha)|}. \tag{3.32}$$

Beweis:
Der Beweis wird in [WCCW17] geführt. □

Aus (3.32) kann mit der Vorgabe einer Fehlerschranke $|e(t)| \leq e_{\lim}$ mit $e_{\lim} \in \mathbb{R}_{>0}$ die notwendige Speicherlänge durch

$$L \geq \left(\frac{M}{e_{\lim}|\Gamma(1-\alpha)|}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.33}$$

unter der Annahme, dass M bekannt ist, bestimmt werden [WCCW17].

Aus der Übertragung der Abschätzung auf die Initialisierungsfunktion folgt, dass spätestens für $t > t_1 + LT$ der durch die Initialisierungsfunktion hervorgerufene Fehler $e(t)$ kleiner als die Schranke $e_{\lim}$ ist [Kup19, S. 35 ff.]. Damit lässt sich die Ableitung mit einem kleinen Fehler nur mit den Funktionswerten aus dem Zeitbereich $[t - LT, t]$ berechnen, sodass weiter zurückliegende Funktionswerte vernachlässigt werden können [Kup19, S. 37].

3.1.5 Fraktionale partielle Integration

Die fraktionale partielle Integration ist ein wesentlicher Schritt in dem Modulationsfunktionsverfahren, das im Abschnitt 3.3 eingeführt wird und im Kapitel 4 und 6 Anwendung findet. An dieser Stelle wird die fraktionale partielle Integration als Teil der Grundlagen der fraktionalen Analysis eingeführt.

Unter der Annahme zweier n-fach stetig differenzierbaren Funktionen f und γ ist die n-fache partielle Integration bei ganzzahligen Ableitungen wohl bekannt [SR11]:

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma(t) \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}^n \gamma(t)}{\mathrm{d}t^n} f(t) \, \mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\frac{\mathrm{d}^j \gamma(t)}{\mathrm{d}t^j} \frac{\mathrm{d}^{n-j-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{n-j-1}} \right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.34}$$

mit $t_0 < t_1$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, t_1]$. Die Ableitungsordnung geht bei Anwendung der partiellen Integration von der Funktion f auf die Funktion γ über. Allerdings tritt eine Summe auf, die die Randwerte an der Untergrenze t_0 und Obergrenze t_1 beinhaltet. Bei der fraktionalen partiellen Integration ist aufgrund der Randwerte eine Unterscheidung zwischen der Definition nach Riemann-Liouville und Caputo notwendig [Eck17, S. 49 f.].

Lemma 3.4 (Fraktionale partielle Integration für die Definition nach Riemann-Liouville und Caputo [Eck17, S. 49 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $t \in [t_0, t_1]$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktionen. Ferner seien die Funktionen f und γ $\lceil \alpha \rceil$-fache stetig differenzierbar.
Die fraktionale partielle Integration für die linksseitige Definition nach Riemann-Liouville ist

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \gamma(t) \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t = & \int_{t_0}^{t_1} {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha} \gamma(t) \, f(t) \, \mathrm{d}t + \\ & \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} (-1)^j \left[\frac{\mathrm{d}^j \gamma(t)}{\mathrm{d}t^j} \frac{\mathrm{d}^{\lfloor \alpha \rfloor - j} \, {}_{t_0}i_t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} t f(t)}{\mathrm{d}t^{\lfloor \alpha \rfloor - j}} \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

und für die Definition nach Caputo

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \gamma(t) \, {}_{t_0}\mathrm{d}C_t^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t = & \int_{t_0}^{t_1} {}_t\mathrm{d}RL_{t_1}^{\alpha} \gamma(t) \, f(t) \, \mathrm{d}t + \\ & \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} (-1)^j \left[\frac{\mathrm{d}^j \, {}_t i_{t_1}^{\alpha} \gamma(t)}{\mathrm{d}t^j} \frac{\mathrm{d}^{\lfloor \alpha \rfloor - j} f(t)}{\mathrm{d}t^{\lfloor \alpha \rfloor - j}} \right]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Beweis:
Die Beweise sind in [Eck17, S. 48 ff., S. 180] gegeben. □

Neben der Tatsache, dass die Ableitung von der Funktion f auf die Funktion γ übergeht, ist anzumerken, dass sich in (3.35) auch der fraktionale Ableitungsoperator von der linksseitigen Definition nach Riemann-Liouville in die rechtsseitige Definition nach Caputo und in (3.36) umgekehrt ändert. Weiterhin treten fraktionale Ableitungen der Funktion f in (3.35) und der Funktion γ in (3.36) als Randwerte auf.

3.1.6 Partielle Ableitungen des fraktionalen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov

In dieser Arbeit finden die erste und zweite Ableitung des uninitialisierten, rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov bezüglich der Ableitungsordnung α Anwendung. Diese Ableitungen sind im Rahmen der Arbeit formuliert worden und werden in den beiden nachfolgenden Lemmata angegeben.

Lemma 3.5 (Erste partielle Ableitung der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov-Definition bezüglich der Ableitungsordnung [SKH20])
Sei $\alpha, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_1, t \in \mathbb{R}$, $t < t_1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ eine absolut stetige Funktion. Ferner sei ${}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha}$ der uninitialisierte, rechtsseitige Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov (3.16) *und die Funktion h $\lceil \alpha \rceil$-fache stetig differenzierbar.*
Die erste partielle Ableitung von (3.16) *nach der Ableitungsordnung α ist*

$$\frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t)}{\partial \alpha} = -\lim_{T\to 0} \frac{\ln(T)}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t + lT) + \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha - \lambda} h(t + lT). \tag{3.37}$$

Beweis:
Der Beweis des Lemmas 3.5 ist im Anhang C.1.1 angegeben. □

Lemma 3.6 (Zweite partielle Ableitung der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov-Definition bezüglich der Ableitungsordnung [SKH20])
Sei $\alpha, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_1, t \in \mathbb{R}$, $t < t_1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktion. Ferner sei ${}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha}$ der uninitialisierte, rechtsseitige Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov (3.16) *und die Funktion h $\lceil \alpha \rceil$-fache stetig differenzierbar.*
Die zweite partielle Ableitung von (3.16) *nach der Ableitungsordnung α ist*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t)}{\partial \alpha^2} = {} & \lim_{T\to 0} \frac{\ln^2(T)}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t + lT) - \\ & \lim_{T\to 0} \frac{2\ln(T)}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha - \lambda} h(t + lT) + \\ & \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha - \lambda} \right)^2 h(t + lT) - \\ & \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha - \lambda)^2} h(t + lT). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Beweis:
Der zum Lemma 3.6 zugehörige Beweis wird im Anhang C.1.2 geführt. □

3.2 Fraktionale Systemdarstellung

Im Abschnitt 3.1 sind die grundlegenden Formeln zur Berechnung der fraktionalen Integration und Ableitung gegeben. Basierend auf den dortigen Definitionen werden die Grundlagen zur Beschreibung von fraktionalen Systemen in diesem Abschnitt vorgestellt. Im Abschnitt 3.2.1 wird als Erstes der Bildbereich betrachtet. Mit Hilfe der für die fraktionale Analysis erweiterten Laplace-Transformation ist eine Darstellung im Zeitbereich möglich, die im Abschnitt 3.2.2 thematisiert wird. Im Abschnitt 3.2.3 wird abschließend eine numerisch umsetzbare geschlossene Lösung der Zeitbereichsdarstellung eingeführt.

3.2.1 Fraktionale Übertragungsfunktion

Die in Definition 2.4 eingeführte Impedanz der Lithium-Ionen-Batteriezelle stellt eine fraktionale Übertragungsfunktion dar. Wie in der ganzzahligen Analysis gilt allgemein, dass die fraktionale Übertragungsfunktion die Beziehung zwischen dem transformierten Systemeingang U und Systemausgang Y darstellt [MCV+10, S. 18].

Definition 3.9 (Fraktionale Übertragungsfunktion [MCV+10, S. 18])
Sei s die komplexe Frequenz, $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I} := \{i \in \mathbb{N} | i \leq n\}$, $\mathcal{K} := \{k \in \mathbb{N} | k \leq m\}$, $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$, $a_i, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_0 < \cdots < \beta_m$ und $\beta_m \leq \alpha_n$.
Die fraktionale Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k s^{\beta_k}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^{\alpha_i}} \tag{3.39}$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $Y(s)$ eines Systems im Bildbereich.

Die Übertragungsfunktion der Form (3.39) wird als nicht-kommensurabel bezeichnet. Wenn sich hingegen die Ableitungsordnungen als Vielfache $\alpha_i = i\alpha$ und $\beta_k = k\alpha$ schreiben lassen, handelt es sich um eine kommensurable Übertragungsfunktion [MCV+10, S. 18]. Der Zusammenhang zum Zeitbereich ergibt sich mit der Erweiterung der Laplace-Transformation für fraktionale Systeme. Wie bei der fraktionalen partiellen Integration muss zwischen der Definition nach Riemann-Liouville und Caputo unterschieden werden [Pod98, S. 105 f.].

Lemma 3.7 (Laplace-Transformation der uninitialisierten fraktionalen Integration und Ableitung nach Riemann-Liouville sowie Caputo [Pod98, S. 105 f.])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t$, s die komplexe Frequenz, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$ eine absolut stetige Funktion und F die zugehörige Funktion im Bildbereich.
Die Laplace-Transformation für die fraktionale Integration ist

$$\mathcal{L}\left\{ {}_{t_0}i_t^{\alpha} f(t) \right\} = \frac{1}{s^{\alpha}} F(s). \tag{3.40}$$

Die Laplace-Transformation der Ableitungsvorschrift nach Riemann-Liouville ist

$$\mathcal{L}\left\{{}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} s^k \; {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=t_0} \tag{3.41}$$

und nach Caputo

$$\mathcal{L}\left\{{}_{t_0}\mathrm{d}C_t^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} s^{\alpha-k-1} \; f^{(k)}(t)\Big|_{t=t_0}. \tag{3.42}$$

Beweis:
Der Beweis findet sich in [Pod98, S. 105 f.]. □

Es ist zu beachten, dass im Lemma 3.7 keine Anfangswerte verwendet werden. In den Definitionen der initialisierten fraktionalen Integration und Ableitung treten hingegen zeitabhängige Initialisierungsfunktionen auf, die bei der Laplace-Transformation gesondert betrachtet werden müssen [LH98, S. 48, 54].

Lemma 3.8 (Laplace-Transformation der initialisierten fraktionalen Integration und Ableitung [LH98, S. 48, 54])
Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < t$, s die komplexe Frequenz, f eine absolut stetige Funktion entsprechend Lemma 3.7 und F die zugehörige Funktion im Bildbereich.
Die Laplace-Transformation für die initialisierte fraktionale Integration ist

$$\mathcal{L}\left\{{}_{t_1}\mathrm{I}_t^{\alpha} f(t)\right\} = \frac{1}{s^{\alpha}}F(s) + \mathcal{L}\left\{\eta(\xi, \alpha, t_0, t_1, t)\right\} \tag{3.43}$$

und für die initialisierte fraktionale Ableitung

$$\mathcal{L}\left\{{}_{t_1}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) + \mathcal{L}\left\{\psi(\xi, \alpha, t_0, t_1, t)\right\}. \tag{3.44}$$

Beweis:
Der Beweis ist in [LH98, S. 48, 54] zu finden. □

Im Lemma 3.8 hängt der spezifische Operator $\mathrm{D}RL$ beziehungsweise $\mathrm{D}C$ wie in Definition 3.7 von der Wahl der Definition des uninitialisierten Operators ab. Aus der Definitionswahl ergibt sich auch die zugehörige Initialisierungsfunktion.

3.2.2 Fraktionale Differentialgleichung

Wie im Bildbereich ist eine Beschreibung eines fraktionalen Systems im Zeitbereich möglich. Dieses erfolgt über eine fraktionale Differentialgleichung (FDGL) mit dem Systemeingang u und dem Systemausgang y.

Definition 3.10 (Fraktionale Differentialgleichung [Eck17, S. 38])
Sei $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 < t$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I} := \{ i \in \mathbb{N} | i \leq n \}$, $\mathcal{K} := \{ k \in \mathbb{N} | k \leq m \}$, $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$, $a_i, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_0 < \cdots < \beta_m$ und $\beta_m \leq \alpha_n$. Ferner sei der Systemeingang $u(t) = 0$ und der Systemausgang $y(t) = 0$ für $t < t_0$.
Die fraktionale Differentialgleichung ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}_t^{\beta_k} u(t) \, . \tag{3.45}$$

Für den Ableitungsoperator in (3.45) kann sowohl die Definition nach Riemann-Liouville als auch die Definition nach Caputo eingesetzt werden. Unabhängig von der gewählten Definition ist der Zusammenhang zwischen der FDGL in Definition 3.10 und der Übertragungsfunktion in Definition 3.9 durch (3.44) allgemein gegeben [Eck17, S. 38]. Wie bei der Darstellung im Bildbereich werden die FDGLen in nicht-kommensurable FDGLen entsprechend Definition 3.10 und kommensurable FDGLen, für die $\alpha_i = i\alpha$ und $\beta_k = k\alpha$ gilt, unterteilt.

Für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation werden nachfolgend zwei Annahmen bezüglich der FDGL getroffen. Die erste Annahme betrifft die Parameter der FDGL und durch die zweite Annahme wird die Eindeutigkeit der FDGL sichergestellt.

Annahme 3.1 (Normierung der Parameter)
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $a_n = 1$ gilt.

Annahme 3.2 (Eindeutigkeit des fraktionalen Systems [Eck17, S. 38])
Für die Übertragungsfunktion in Definition 3.9 und die FDGL in Definition 3.10 wird die Teilerfremdheit der Polynome

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^{\alpha_i} \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^{\beta_k}$$

angenommen.

Für das betrachtete Ausgangssignal in der vorliegenden Arbeit soll

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon(t) \tag{3.46}$$

mit dem rauschfreien Ausgangssignal y und dem Rauschen ε gelten. Für das Rauschen gilt die folgende Annahme.

Annahme 3.3 (Rauscheigenschaften)
Es wird mittelwertfreies, weißes Rauschen

$$\mathrm{E}\{\varepsilon(t)\} = 0 \qquad \textit{und} \tag{3.47}$$

$$\mathrm{E}\{\varepsilon(t)\,\varepsilon(t-\tau)\} = \sigma^2 \delta(\tau) \tag{3.48}$$

mit dem Erwartungswert E, der Varianz σ^2 und der Delta-Distribution δ gilt [IM11, S. 56].

Bezüglich dem Eingangssignal u und dem verrauschten Ausgangssignal $\tilde{y}$ werden noch abschließend zwei Annahme getroffen.

Annahme 3.4 (Beschränktes Ein- und Ausgangssignal)
Es wird angenommen, dass das Eingangssignal und das verrauschte Ausgangssignal stets eine beschränkte Amplitude aufweisen.

Annahme 3.5 (Unverrauschtes Eingangssignal)
Es wird angenommen, dass das Eingangssignal unverrauscht ist.

3.2.3 Geschlossene Lösung für fraktionale Differentialgleichungen

Nur für wenige FDGLen kann eine analytische Lösung bestimmt werden. Jedoch ist zumindest eine approximative Lösung über numerische Ansätze möglich [Xue17, S. 113]. Der Ausgangspunkt für den numerischen Ansatz ist eine uninitialisierte FDGL entsprechend Definition 3.10. Unter der Annahme, dass das Eingangssignal stetig ist, sind die Definitionen der uninitialisierten Ableitungen im Abschnitt 3.1.2 äquivalent [Xue17, S. 87 ff.]. Aus diesem Grund kann die Definition nach Grünwald-Letnikov zur Beschreibung der Ableitungsoperatoren gewählt werden.

Lemma 3.9 (Geschlossene Lösung für FDGLen [Xue17, S. 113 ff.])
Sei $t_0, t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t$, $T \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I} := \{i \in \mathbb{N} | i \leq n\}$, $\mathcal{K} := \{k \in \mathbb{N} | k \leq m\}$, $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$, $a_i, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_0 < \cdots < \beta_m$ *und* $\beta_m \leq \alpha_n$ *und sei die fraktionale Differentialgleichung*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_0}\mathrm{d}GL_t^{\beta_k} u(t) \tag{3.49}$$

gegeben.
Dann kann die geschlossene Lösung der FDGL durch

$$y(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t - lT) - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t - lT) \right] \tag{3.50}$$

berechnet werden.

Beweis:
Der Beweis wird in [Xue17, S. 113 ff.] erbracht und ist auch im Anhang C.2 aufgeführt. □

Ein numerisch umsetzbarer Algorithmus ergibt sich bei der Wahl einer endlichen Abtastzeit, wobei dadurch eine Approximation der geschlossenen Lösung vorgenommen wird. Für eine numerisch robustere Umsetzung wird in [Xue17, S. 114] vorgeschlagen, in einem ersten Schritt den Einfluss durch die Ausgangsparameter und anschließend den Einfluss durch die Eingangsparameter zu evaluieren. Durch diese Evaluierungsreihenfolge gehen konstante Eingangssignale auch beim Auftreten von ganzzahligen Ableitungsordnungen korrekt in die Berechnung des Ausgangssignals ein. Weiterhin wird eine rekursive Berechnung des Binomialkoeffizienten

$$(-1)^l \binom{\alpha}{l} = \begin{cases} 1 & \text{for } l = 0 \\ \left(1 - \frac{\alpha+1}{l}\right) (-1)^{l-1} \binom{\alpha}{l-1} & \text{for } l = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.51}$$

unter Berücksichtigung des Vorfaktors $(-1)^l$ für eine numerisch robustere Berechnung angegeben [Xue17, S. 113].

3.3 Modulationsfunktionsverfahren

Das Modulationsfunktionsverfahren ist erstmalig in [Shi54] zur Parameteridentifikation gewöhnlicher Systeme beschrieben worden. Die Idee des Modulationsfunktionsverfahren ist, mit Hilfe der partiellen Integration die Ableitungen des Ein- und Ausgangssignal auf eine vorgebbare Funktion zu übertragen. Dadurch wird das Ableiten des verrauschten Ausgangssignals (3.46) vermieden, das ein inkorrektes mathematisches Problem bildet [JJ09]. Insgesamt besteht das Modulationsfunktionsverfahren aus vier Schritten:

1. Multiplikation der FDGL mit einer vorgebbaren Funktion,
2. Integration des modulierten Systems über einen festlegbaren Identifikationshorizont,
3. Anwendung der fraktionalen partiellen Integration und
4. Parameteridentifikation.

3.3.1 Modulationsfunktion

Aufgrund der partiellen Integration geht die Ableitungsberechnung auf die vorgebbare Funktion über. Damit dieser Schritt anwendbar ist, muss die vorgebbare Funktion mindestens so oft stetig differenzierbar sein, dass die Differentiationsklasse der vorgebbaren Funktion der Klasse des Systems entspricht. Dabei treten aufgrund der partiellen Integration entsprechend (3.34) Randwerte auf. Falls die vorgebbare Funktion die Randwerte eliminiert, wird diese Modulationsfunktion genannt. Diese Idee ist auf fraktionale Systeme u.a. in [ALL14], [EKH14], [Gao17], [GLZ18], [LLGP13], [WLB+17] übertragen worden.

Definition 3.11 (Modulationsfunktion für fraktionale Systeme [EKH14])
Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ die größte Ableitungsordnung der FDGL entsprechend Definition 3.10, $\mathcal{I} := \{ i \in \mathbb{N} | \, i \leq \lceil \alpha_n \rceil \}$ und $i \in \mathcal{I}$.
Eine Funktion γ, die die Eigenschaften

$$\begin{aligned} (P1) &: \; \gamma(t) \in \mathcal{C}^{\alpha_n}([t_0, t_1]) \\ (P2) &: \; \gamma^{(i)}(t_0) = \gamma^{(i)}(t_1) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt, heißt Modulationsfunktion.

Eine Übersicht von Funktionen, die die Eigenschaften in Definition 3.11 erfüllen, ist in [PR93a, S. 6] gegeben. Eine Modulationsfunktion ist beispielsweise die Spline-Type-Modulationsfunktion [Mal78]. Diese Funktion wird aus der wiederholten Integration einer gewichteten Impulsfolge generiert.

Definition 3.12 (Spline-Type-Modulationsfunktion [Mal78])
Sei $s \in \mathbb{N}$, $o \in \mathbb{N}_0$, $s \geq o + 2$ und $t_0, t, T \in \mathbb{R}$.
Die Spline-Type-Modulationsfunktion ist als

$$\gamma_{s,o}(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \cdots \int_{t_0}^{t_0+T}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j\frac{T}{s} - t + t_0\right) \mathrm{d}t^{o+2} \tag{3.52}$$

mit der Delta-Distribution δ definiert. Dabei entspricht s der Anzahl der Impulse und o der Ordnung der Spline-Type-Modulationsfunktion.

Die Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52) ist entsprechend der Ordnung o häufig stetig differenzierbar [Eck17, S. 161 f.].

3.3.2 Parameteridentifikation mit Hilfe des Modulationsfunktionsverfahrens

Das Anwenden der ersten drei Schritte des Modulationsfunktionsverfahrens auf eine uninitialisierte FDGL nach Definition 3.10 führt auf das nachfolgende Lemma.

Lemma 3.10 (Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens [Eck17, S. 51 ff.])
Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, die FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\, t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\, t_0}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{3.53}$$

und γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11.

Die Identifikationsgleichung, die sich aus der Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens auf die uninitialisierte FDGL (3.53) *ergibt, führt auf*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m} b_k \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\beta_k} \gamma(t)\, \mathrm{d}t. \tag{3.54}$$

Beweis:
Der Beweis wird in [Eck17, S. 51 ff.] geführt. □

Zum Lemma 3.10 ist anzumerken, dass bezogen auf eine Parameteridentifikation eine lineare, algebraische Gleichung in den unbekannten Parametern a_i, b_k vorliegt. Durch Erzeugen von unabhängigen Gleichungen kann ein lineares Gleichungssystem algebraischer Gleichungen aufgestellt werden. Unabhängige Gleichungen können durch Verwendung unterschiedlicher Modulationsfunktionen oder durch Verwendung unterschiedlicher Anregungssignale erreicht werden [Eck17, S. 53 ff.]. Zudem wird in [Eck17, S. 53 ff.] vorgeschlagen, die unabhängige Gleichungen durch Verschieben der Modulationsfunktion zu erzeugen, sodass sich unterschiedliche Integrationszeitpunkte ergeben. Dadurch dass sich das System zu Beginn der verschobenen Integrationszeitpunkte nicht mehr in Ruhe befindet, müssen die initialisierten Ableitungsoperatoren (3.26) des Ein- und Ausgangssignals zur eindeutigen Beschreibung des fraktionalen Systems verwendet werden [LH08]. Die Initialisierungsfunktionen werden jedoch für die Parameteridentifikation nicht berücksichtigt. Die Untersuchung des Einflusses der Initialisierungsfunktion auf die Identifikationsgleichung (3.54) erfolgt im Abschnitt 4.1. Im nachstehenden Lemma 3.11 wird die Identifikation anhand der Anwendung unterschiedlicher Modulationsfunktionen erläutert.

Lemma 3.11 (Lineares Gleichungssystem zur Parameteridentifikation [LLGP13])
Sei die FDGL

$${}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_n} y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t), \tag{3.55}$$

$q \geq n+m+1$, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}$, $h \in \mathcal{H}$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, *und seien* γ_h *unterschiedliche Modulationsfunktionen nach Definition 3.11.*
Das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p} \tag{3.56}$$

mit $\boldsymbol{p} := [a_{n-1}, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0]^\top$ *muss zur Identifikation der Parameter* a_i *und* b_k *gelöst werden, wobei* $\boldsymbol{z} := [z_0, \ldots, z_q]^\top$ *die* α_n*-te Ableitung des modulierten Ausgangssignal*

$$z_h := \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_n} \gamma_h(t)\, \mathrm{d}t \tag{3.57}$$

und die Messmatrix $\boldsymbol{M} := [\boldsymbol{m}_0,\ \dots,\ \boldsymbol{m}_q]^\top$ *mit*

$$\boldsymbol{m}_h^\top := \Bigg[-\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_{n-1}}\gamma_h(t)\,\mathrm{d}t,\ \dots,\ -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_0}\gamma_h(t)\,\mathrm{d}t,\\ \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\beta_n}\gamma_h(t)\,\mathrm{d}t,\ \dots,\ \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\beta_0}\gamma_h(t)\,\mathrm{d}t\Bigg] \tag{3.58}$$

die übrigen Ableitungen des Ein- und Ausgangssignals beschreibt.

Beweis:
Der Beweis wird in [LLGP13] erbracht. □

Um die Parameter des fraktionalen Systems (3.55) zu bestimmen, muss das lineare Gleichungssystem (3.56) gelöst werden. Ein Standardverfahren zum Lösen eines solchen Gleichungssystem stellt die LS-Methode dar, das den letzten Schritt des Modulationsfunktionsverfahrens bildet [ALL15].

Lemma 3.12 (Parameteridentifikation mittels der LS-Methode in Blockverarbeitung)
Sei

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p} \tag{3.59}$$

das lineare Gleichungssystem (3.56) *und* $\mathrm{rang}\,(\boldsymbol{M}) = n + m + 1$.
Die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ *des fraktionalen Systems* (3.55) *werden durch*

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{z} \tag{3.60}$$

bei Anwendung der Blockverarbeitung der LS-Methode identifiziert.

Beweis:
Die Berechnungsvorschrift (3.60) ergibt sich aus dem allgemeinen Ansatz der LS-Methode, der von Isermann [IM11, S. 223 ff.] hergeleitet wird. Der Beweis ist in [Eck17, S. 53 ff.] zu finden. □

Eine häufig weniger rechenintensive und echtzeitfähige Variante zum Identifizieren bildet die rekursive LS-Methode.

Lemma 3.13 (Parameteridentifikation mittels der rekursiven LS-Methode [IM11, S. 271 f.])
Sei z_h *die* α_n*-te Ableitung des modulierten Ausgangssignals entsprechend* (3.56), $\boldsymbol{m}_h$ *ein Zeilenvektor der Messmatrix* $\boldsymbol{M}$ *entsprechend* (3.58), $\boldsymbol{I}$ *eine* $(n + m + 1) \times (n + m + 1)$ *Einheitsmatrix und* $\boldsymbol{P}$ *die Kovarianzmatrix.*

Die rekursive Berechnungsvorschrift der LS-Methode zur Parameteridentifikation $\hat{\boldsymbol{p}}$ für das Modulationsfunktionsverfahren ist mit den Gleichungen

$$\boldsymbol{K}_h = \frac{\boldsymbol{P}_h \boldsymbol{m}_{h+1}}{\boldsymbol{m}_{h+1}^\top \boldsymbol{P}_h \boldsymbol{m}_{h+1} + 1} \tag{3.61}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{h+1} = \hat{\boldsymbol{p}}_h + \left(z_{h+1} - \boldsymbol{m}_{h+1}^\top \hat{\boldsymbol{p}}_h \right) \tag{3.62}$$

$$\boldsymbol{P}_{h+1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_h \boldsymbol{m}_{h+1}^\top \right) \boldsymbol{P}_h \tag{3.63}$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{P}_0$ für die erste Iteration vorzugeben ist.

Beweis:
Der Beweis ist [IM11, S. 271 f.] zu entnehmen. □

3.3.3 Parameteridentifikation bei verrauschtem Ausgangssignal

Unter realen Bedingungen wird das ideale Ausgangssignal y von Störeinflüssen überlagert. In der vorliegenden Arbeit wird eine additive Überlagerung des Ausgangssignal y mit einem Rauschen entsprechend (3.46) angenommen, das die Eigenschaften in Annahme 3.3 aufweist. Exemplarisch ergibt sich die α_n-te Ableitung des modulierten Ausgangssignals zu

$$\tilde{z}_h := \int_{t_0}^{t_1} y(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_n} \gamma_h(t) \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_n} \gamma_h(t) \, \mathrm{d}t. \tag{3.64}$$

Der Gleichungsfehler $\boldsymbol{e} := [e_0, \ldots, e_q]^\top$ mit

$$e_h = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_0}^{t_1} \tilde{y}(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_i} \gamma_h(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} b_k \int_{t_0}^{t_1} u(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\beta_k} \gamma_h(t) \, \mathrm{d}t \tag{3.65}$$

beinhaltet somit auch die verrauschten Ausgangsgrößen $\tilde{y}$. Da der Gleichungsfehler $\boldsymbol{e}$ für die ursprünglichen Parameter $\boldsymbol{p}$ im Gegensatz zum rauschfreien Fall nicht Null wird, führt die Minimierung des quadratischen Gleichungsfehlers entsprechend der LS-Methode auf einen Parameterschätzwert $\hat{\boldsymbol{p}} := \left[\hat{a}_{n-1}, \ldots, \hat{b}_0 \right]^\top$, der im Allgemeinen von den Parametern $\boldsymbol{p}$ des Systems abweicht [PR93a], [Eck17, S. 61 ff.]. Ein zusätzlicher Fehler in den Parameterschätzwerten $\hat{\boldsymbol{p}}$ aufgrund der Ableitung verrauschter Messgrößen tritt bei dem Modulationsfunktionsverfahren nicht auf, da die Modulationsfunktion abgeleitet wird [PR93a].

Da die Modulationsfunktion vorgebbar ist, können neben den beiden notwendigen Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$ in Definition 3.11 noch weitere Eigenschaften formuliert werden. In [WLB+17] wird beispielsweise eine Modulationsfunktion mit der im Lemma 3.14 Eigenschaft verwendet, sodass ein konstanter Offset ϱ in der Messung des Ausgangssignals eliminiert wird. Dadurch muss der Offset ϱ für eine fehlerfreie Parameteridentifikation nicht explizit geschätzt werden.

Lemma 3.14 (Eigenschaft zur Eliminierung eines konstanten Offsets [WLB+17])
Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, die FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} \tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t), \tag{3.66}$$

mit dem Ausgangssignal $\tilde{y} = y + \varrho$, wobei y das ungestörte Ausgangssignal und ϱ ein konstanter Offset ist, und γ eine Modulationsfunktion entsprechend Definition 3.11. Wenn die Modulationsfunktion γ zusätzlich die Eigenschaft

$$(P3) \ : \ \int_{t_0}^{t_1} {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\alpha_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t = 0 \tag{3.67}$$

besitzt, wird ein konstanter Offset ϱ im Ausgangssignal $\tilde{y}$ bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens eliminiert.

Beweis:
Der Beweis ist in [WLB+17] zu finden. □

Diese Eigenschaft lässt sich direkt auf ein mit einem Offset überlagerten Eingangssignal übertragen und resultiert in

$$\int_{t_0}^{t_1} {}_t\mathrm{d}C_{t_1}^{\beta_k} \gamma(t) \, \mathrm{d}t. \tag{3.68}$$

Beispielsweise erfüllt die in [WLB+17] eingesetzte Polynom-Modulationsfunktion, die im Anhang D angegeben ist, die Eigenschaft $(P3)$. Nachteilig an der Forderung zusätzlicher Eigenschaften ist, dass dadurch die möglichen Kandidaten der Modulationsfunktionen verringert werden. Zum Beispiel besitzt die von Bruederle und Weber [PR93a, S. 6] formulierte Modulationsfunktion

$$\gamma_{\mathrm{bw}}(t) := a\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \tag{3.69}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in [0, T]$ die Eigenschaft $(P3)$ nicht, da für $\alpha = 0$

$$\int_{0}^{T} {}_t\mathrm{d}C_T^{\alpha} \gamma_{\mathrm{bw}}(t) \, \mathrm{d}t = aT \tag{3.70}$$

folgt. Obwohl die Funktion (3.69) eine Modulationsfunktion entsprechend Definition 3.11 ist, kann diese nicht eingesetzt werden, falls zusätzlich die Eigenschaft $(P3)$ von der Modulationsfunktion gefordert wird.

4 Parameteridentifikation für initialisierte fraktionale Systeme

Die im Abschnitt 2.3 verwendeten Kriterien zur Einordnung des Stands der Wissenschaft, dass einerseits sich das fraktionale System zu Beginn der Parameteridentifikation nicht in Ruhe befindet und andererseits das Ausgangssignal als verrauschte Messgröße vorliegt, bilden die zentralen Anforderungen für das im Rahmen der Arbeit hergeleitete Parameteridentifikationsverfahren. Das Identifikationsverfahren wird auf dem Modulationsfunktionsverfahren aufgebaut (siehe Abschnitt 3.3), da zum einen das Modulationsfunktionsverfahren eine geringe Rauschsensitivität besitzt. Zum anderen kann die Modulationsfunktion durch weitere Eigenschaften an spezifische Anforderungen wie im Lemma 3.14 gezeigt angepasst werden.

Bislang ist bei der Parameteridentifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren ein zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindliches fraktionales System angenommen worden. Im Abschnitt 4.1 wird diese Annahme für fraktionale Systeme erstmalig nicht getroffen. Somit müssen entsprechend Abschnitt 3.1.3 die initialisierten Ableitungsoperatoren zur Beschreibung des fraktionalen Systems eingesetzt werden. Zur Eliminierung des unbekannten Initialisierungseinflusses wird eine zusätzliche Eigenschaft für die Modulationsfunktion formuliert. Ein erster Ansatz zur Berücksichtigung zeitvarianter Parameter erfolgt im Abschnitt 4.2, wobei ebenfalls ein nicht in Ruhe befindliches System betrachtet wird. Um auch bei einem verrauschten Ausgangssignal die Parameter des fraktionalen Systems biasfrei zu identifizieren, wird im Abschnitt 4.3 die Methode der Hilfsvariablen[19] (IV-Methode) in Kombination mit dem Modulationsfunktionsverfahren auf fraktionale Systeme erweitert. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden im Abschnitt 4.4 zusammengefasst und diskutiert.

4.1 Modulationsfunktionsverfahren für initialisierte fraktionale Systeme

Die Annahme, dass das fraktionale System zu Beginn der Parameteridentifikation t_1 nicht in Ruhe sein soll, bedeutet für die uninitialisierten Ableitungen, dass ${}_{t_0}d_t^{\alpha} f(t) \neq {}_{t_1}d_t^{\alpha} f(t)$ mit $t_0 < t_1$ gilt. Damit die Funktionsverläufe des Systems korrekt berechnet werden, muss die Initialisierungsfunktion in der FDGL berücksichtigt werden und daher im Gegensatz zur Parameteridentifikation im Abschnitt 3.3.2 die initialisierte FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{4.1}$$

betrachtet werden.

[19] engl. instrumental variable

4.1.1 Eigenschaft zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses

Aufgrund der Verwendung der initialisierten Ableitungsdefinitionen zur Beschreibung des fraktionalen Systems (4.1) ändert sich ebenfalls die Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens (3.54). Die geänderte Identifikationsgleichung wird als Erstes hergeleitet. Aus Basis dieser Identifikationsgleichung wird anschließend eine Eigenschaft der Modulationsfunktion abgeleitet, die den Einfluss der Initialisierungsfunktion eliminiert.

Lemma 4.1 (Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens für initialisierte FDGLen [SKKH18])
Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{4.2}$$

die initialisierte FDGL, γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11, $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und $t_0 < t_1 < t_2$.
Die Identifikationsgleichung, die sich aus der Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens auf die initialisierte FDGL (4.2) *ergibt, führt auf*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right) = \\ \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k}\gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Beweis:
Analog zum Beweis des Lemmas 3.10 wird die initialisierte FDGL (4.2) zunächst mit der Modulationsfunktion γ multipliziert und anschließend im Intervall $[t_1, t_2]$ integriert

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_1}^{t_2} {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m} b_k \int_{t_1}^{t_2} {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

Entsprechend der Definition 3.6 kann der initialisierte Ableitungsoperator in die beiden Summanden, uninitialisierter Operator d und Initialisierungsfunktion ψ, geteilt werden:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\int_{t_1}^{t_2} {}_{t_1}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} y(t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(y, \alpha_i, t_0, t_1, t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right) = \\ \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\int_{t_1}^{t_2} {}_{t_1}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(u, \beta_k, t_0, t_1, t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Für den uninitialisierten Ableitungsoperator ergibt sich das aus Lemma 3.10 bekannte Ergebnis (3.54). Die Summanden, die die Initialisierungsfunktionen repräsentieren, werden exemplarisch für der α_i-ten Ableitung des Ausgangssignals ausgewertet. Dafür wird als erster Schritt die Definition der Initialisierungsfunktion (B.1) eingesetzt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(y,\alpha_i,t_0,t_1,t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha_i\rceil-\alpha_i)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil\alpha_i\rceil}\int_{t_0}^{t_1}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_i-\lfloor\alpha_i\rfloor}}\mathrm{d}\tau\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \quad (4.6)$$

Wie bei der uninitialisierten Ableitung wird die fraktionale partielle Integration (3.35) angewendet, wobei die Randbedingungen aufgrund der Eigenschaft $(P2)$ der Modulationsfunktion verschwinden. Dieser Schritt resultiert in

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(y,\alpha_i,t_0,t_1,t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\,\frac{(-1)^{\lceil\alpha\rceil}}{\Gamma(\lceil\alpha_i\rceil-\alpha_i)}\int_{\tau}^{t_2}\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil\alpha_i\rceil}\gamma(t)}{(t-\tau)^{\alpha_i-\lfloor\alpha_i\rfloor}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau. \quad (4.7)$$

Anwenden der Definition der rechtsseitigen Ableitung nach Caputo (3.10) ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(y,\alpha_i,t_0,t_1,t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\,{}_{\tau}\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i}\mathrm{d}\tau. \quad (4.8)$$

Die gleichen Schritte werden auf die Initialisierungsfunktionen des Eingangssignals für alle Ableitungsordnungen β_k angewendet, das

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_{\mathrm{RL}}(u,\beta_k,t_0,t_1,t)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)\,{}_{t}\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_i}\mathrm{d}\tau \quad (4.9)$$

zum Ergebnis hat. Einsetzen von (3.54), (4.8) und (4.9) in (4.5), ergibt die Identifikationsgleichung (4.3) des Modulationsfunktionsverfahrens für initialisierte FDGLen (4.2). □

Aus der Identifikationsgleichung in Lemma 4.1 wird die zusätzliche Eigenschaft zur Eliminierung der Initialisierungsfunktion direkt ersichtlich.

Lemma 4.2 (Eigenschaft der Modulationsfunktion zur Eliminierung der Initialisierungsfunktion [SKKH18])

Sei $t_0, t_1, t_2, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < t_2$, γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 und seien α_i, β_k die Ableitungsordnungen der FDGL (4.2).
Wenn die Modulationsfunktion γ die Eigenschaft

$$(P4)\ :\ \begin{cases} {}_{t}\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i}\gamma(t) = 0 \\ {}_{t}\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k}\gamma(t) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

im Intervall $t \in [t_0, t_1]$ besitzt, wird der Einfluss der Initialisierungsfunktion in der Identifikationsgleichung (4.3) *eliminiert.*

Beweis:
Der Beweis folgt direkt durch Einsetzen von (4.10) in (4.3). □

Anzumerken zu der Eigenschaft $(P4)$ ist, dass diese bezogen auf die Menge der Modulationsfunktionen einschränkend ist (siehe Abschnitt 3.3.3). Wenn jedoch die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt, ist die Identifikationsgleichung der initialisierten FDGL (4.3) gleich der Identifikationsgleichung der uninitialisierten FDGL (3.54).

Neben der im Abschnitt 3.3.2 vorgestellten Möglichkeiten zum Erstellen eines Gleichungssystems (3.56), aus dem die Parameter des fraktionalen Systems bestimmt werden können, existiert durch die Eigenschaft $(P4)$ eine weitere Möglichkeit. Falls die eingesetzte Modulationsfunktion die Eigenschaft besitzt, kann die Identifikationsgleichung (4.3) für unterschiedliche Zeitpunkte ausgewertet werden.

Lemma 4.3 (Lineares Gleichungssystem zur Parameteridentifikation durch Verschiebung der Integrationsgrenzen)
Sei

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_n} y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \,, \tag{4.11} $$

die FDGL, $q \geq n + m + 1$*,* $\mathcal{H} := \{ h \in \mathbb{N} | \, h \leq q \}$*,* $h \in \mathcal{H}$*,* $t_0, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$*,* $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$*,* $t_0 < t_1$*,* $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$*,* $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$ *und sei* γ *eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 mit der Eigenschaft* $(P4)$ *gegeben.*
Das lineare Gleichungssystem

$$ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p} \tag{4.12} $$

mit $\boldsymbol{p} := [a_{n-1}, \, \ldots, \, a_0, \, b_m, \, \ldots, \, b_0]^\top$ *muss zur Identifikation der Parameter* a_i *und* b_k *gelöst werden, wobei* $\boldsymbol{z} := [z_0, \, \ldots, \, z_q]^\top$ *die* α_n*-te Ableitung des modulierten Ausgangssignal*

$$ z_h := \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_n} \gamma(t) \, \mathrm{d}t \tag{4.13} $$

und die Messmatrix $\boldsymbol{M} := [\boldsymbol{m}_0, \, \ldots, \, \boldsymbol{m}_q]^\top$ *mit*

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{m}_h^\top := \Bigg[& -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_{n-1}} \gamma(t) \, \mathrm{d}t, \, \ldots, \, -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_0} \gamma(t) \, \mathrm{d}t, \\ & \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_n} \gamma(t) \, \mathrm{d}t, \, \ldots, \, \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_0} \gamma(t) \, \mathrm{d}t \Bigg] \end{aligned} \tag{4.14} $$

die übrigen Ableitungen des Ein- und Ausgangssignals beschreibt.

Beweis:
Als Erstes wird die Modulationsfunktion im Intervall $[t_1, t_1 + T_i]$ auf das fraktionale System (4.11) angewendet. Mit den Notationen (4.13) und (4.14) ergibt sich

$$z_0 = \boldsymbol{m}_0^\top \boldsymbol{p}. \tag{4.15}$$

Anschließend wird das Zeitintervall um $T_\triangle$ verschoben, wodurch die neue Gleichung

$$z_1 = \boldsymbol{m}_1^\top \boldsymbol{p} \tag{4.16}$$

für das Intervall $[t_1 + T_\triangle, t_1 + T_i + T_\triangle]$ bestimmt wird. Dies wird solange fortgesetzt, bis mindestens q unabhängige Gleichungen vorliegen, die entsprechend (4.12) zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefasst werden. □

Das lineare Gleichungssystem lässt sich für die Parameterbestimmung beispielsweise mittels der LS-Methode entsprechend Lemma 3.12 lösen [ALL15].

4.1.2 Wahl der Modulationsfunktion

In der nachstehenden Definition 4.1 wird eine Modulationsfunktion definiert, die die Eigenschaft $(P4)$ besitzt.

Definition 4.1 (Gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion)
Sei $s \in \mathbb{N}$, $o \in \mathbb{N}_0$, $s \geq o + 2$, $t_0, t_1, t_2, t, \tau, \alpha \in \mathbb{R}$ und $\tau \leq t$.
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion ist als

$$\gamma_{s,o}(t) = (t - \tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2} \tag{4.17}$$

mit der Delta-Distribution δ definiert. Dabei entspricht s der Anzahl der Impulse und o der Ordnung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion.

Zwei Anmerkungen sind zu der Definition der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) zu machen. Da die rechtsseitige Ableitung auf die Modulationsfunktion in der Identifikationsgleichung (4.3) angewendet wird, ist die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion im rechtsseitigen Sinne definiert worden, wodurch sich der Faktor $(\tau - t)^{\alpha+1}$ ergibt. Die zweite Anmerkung betrifft eben den Faktor $(t - \tau)^{\alpha+1}$. Dieser Faktor dient wie bei der fraktionalen Gram'schen Matrix in [Das13], [Eck17] zur Kompensation von Singularitäten. Der Faktor kann als zeitabhängige Gewichtung aufgefasst werden. Abhängig des zu betrachteten Zeitpunkts τ werden zurückliegende Funktionswerte gewichtet.

Im Lemma 4.4 wird gezeigt, dass die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) die beiden notwendigen Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$ einer Modulationsfunktion erfüllt.

Lemma 4.4 (Modulationsfunktionseigenschaften der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie in der Definition 4.1 gegeben und sei zusätzlich $\alpha_n \in \mathbb{R}$ die größte Ableitungsordnung eines fraktionalen Systems (4.1) *sowie $\gamma_{s,o}$ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.17).
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *erfüllt die Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$, wenn für die Ordnung $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ gilt.*

Beweis:
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) lässt sich in die zwei Funktionen

$$f(t) := (t-\tau)^{\alpha_n+1} \tag{4.18}$$

und

$$g(t) := \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j\frac{t_2-t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2} \tag{4.19}$$

aufteilen, wobei g der Struktur der Spline-type-Modulationsfunktion (3.52) entspricht. Während die Funktion f mittels der Potenzregel beliebig oft differenzierbar ist, sind für die Ableitung der Funktion g die Ableitungsregeln eines Parameterintegral [Zei13, S. 355 f.] anzuwenden, woraus

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) g(t) := \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+1)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j\frac{t_2-t_1}{s} - t\right) \mathrm{d}t^{o+1} \tag{4.20}$$

folgt [Mal78]. Aus der Definition 3.12 der Spline-Type-Modulationsfunktion folgt direkt, dass diese (o)-fach stetig differenzierbar ist. Damit ist die Eigenschaft $(P1)$ erfüllt, wenn $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist.

Für die Eigenschaft $(P2)$ muss die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.27) an den beiden Grenzen t_1 und t_2 verschwinden. Dafür wird ausgenutzt, dass die Spline-Type-Modulationsfunktion ein stückweise definiertes Polynom auf dem Intervall $t \in [t_1, t_2]$ ist [Mal78]. Dadurch muss für die Obergrenze $t = t_2$ die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auf dem Intervall $t \in [t_2 - {}^{(t_2-t_1)}/_{s}, t_2]$ ausgewertet werden, für das $j = s$ in (4.17) beziehungsweise in (4.19) gilt. Aufgrund der Definition im rechtsseitigen Sinne folgt

$$\gamma_{s,o}^{[s]}(t_2) = (t_2-\tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2} \cdots \int_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2}}_{(o+2)-mal} (-1)^s \, \delta(t_2-t) \, \mathrm{d}t^{o+2} \tag{4.21}$$

$$= (t_2-\tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2} \cdots \int_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2}}_{(o+1)-mal} (-1)^s \, \Theta(t_2-t) \, \mathrm{d}t^{o+1} \tag{4.22}$$

mit der Heaviside-Funktion Θ und nach [AS65, S. 1021] [PR93b] ergibt sich

$$= (t_2 - \tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int\limits_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2} \cdots \int\limits_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2}}_{(o)-mal} (-1)^s (t_2 - t) \, \mathrm{d}t^o \tag{4.23}$$

$$= (t_2 - \tau)^{\alpha+1} \frac{(-1)^{s+o}}{(o+1)!} (t_2 - t)^{o+1} \Bigg|_{t_2-(t_2-t_1)/s}^{t_2} . \tag{4.24}$$

Aus (4.24) folgt, dass die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) an der Obergrenze $t = t_2$ zu Null wird. Nachfolgend wird die Modulationsfunktion für das Zeitintervall $t \in (-\infty, t_1]$ untersucht. Für diesen Zeitbereich gilt für die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.27)

$$\gamma_{s,o}(t) = (t - \tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t_2} \cdots \int\limits_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2}. \tag{4.25}$$

Aufgrund der symmetrischen Anordnung der Dirac-Distributionen im Intervall $t \in [t_1, t_2]$ und, da für die Summe der Binomialkoeffizienten

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} = 0 \tag{4.26}$$

nach [ABH+13, S. 132 f.] gilt[20], ist die Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52) für das betrachtete Zeitintervall $t \in (-\infty, t_1]$ per Definition Null [PR93a, S. 6], [PR93b]. Daraus folgt, dass die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.27) auch die Eigenschaft $(P2)$ besitzt. □

Aus Lemma 4.4 geht hervor, dass die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) eine Modulationsfunktion im Sinne der Definition 3.11 ist. Damit fehlt noch die Überprüfung der gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) bezüglich der Eigenschaft $(P4)$. Dafür ist die rechtsseitige Ableitung nach Caputo (3.10) der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion zu bestimmen, die die $\lceil \alpha \rceil$-fache Ableitung der abzuleitenden Funktion benötigt. Diese wird als Erstes bestimmt, bevor die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auf die Eigenschaft $(P4)$ untersucht wird.

[20] Aus dem binomischen Lehrsatz $(x + y)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^{n-j} y^j$ folgt mit $x = 1$ und $y = -1$ direkt (4.26).

Lemma 4.5 (Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie in der Definition 4.1 gegeben und sei zusätzlich $n \in \mathbb{N}$ sowie $\gamma_{s,o}$ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17).
Die Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \gamma_{s,o}(t) = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} \left(\prod_{\kappa=0}^{n-1-\lambda} \alpha + 1 - \kappa\right) (t-\tau)^{\alpha-n+1+\lambda} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j\frac{t_2-t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2-\lambda}, \tag{4.27}$$

wenn $o \geq n$ ist.

Beweis:
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) lässt sich wie im Beweis zum Lemma 4.4 in die beiden Funktionen f und g aufteilen. Die Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.27) folgt aus der Anwendung der Leibniz'schen Produktregel [Zei13, S. 261]. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Spline-Type-Modulationsfunktion g (4.19) maximal o-fach stetig differenzierbar ist (siehe [PR93a, S. 6]). □

Mit Lemma 4.5 ist die $\lceil\alpha\rceil$-fache Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion gegeben und die Überprüfung auf die Eigenschaft $(P4)$ kann erfolgen.

Lemma 4.6 (Eliminationseigenschaft der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie in der Definition 4.1 gegeben und sei zusätzlich $n \in \mathbb{N}$ sowie $\gamma_{s,o}$ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17).
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *erfüllt die Eigenschaften $(P4)$, wenn $o \geq \lceil\alpha_n\rceil$ ist.*

Beweis:
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) wird in die Berechnungsvorschrift (4.10) der Eigenschaft $(P4)$ eingesetzt. Für die α_n-te Ableitung des fraktionalen Systems (3.45) ergibt sich

$${}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\lceil\alpha_n\rceil}\gamma_{s,o}(t)\,. \tag{4.28}$$

Die Anwendung der rechtsseitigen Definition nach Caputo (3.10) führt auf

$${}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_n}\gamma_{s,o}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{\alpha_n} \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha_n\rceil - \alpha_n)} \int_t^{t_2} \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\lceil\alpha_n\rceil}\gamma_{s,o}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha_n-\lfloor\alpha_n\rfloor}}\mathrm{d}\tau. \tag{4.29}$$

In (4.29) wird die Notation der Definition des rechtsseitigen Ableitungsoperators (3.10) verwendet, sodass sich die Variablen t und τ gegenüber der Definition 4.1 gerade vertauschen. Da

sich die Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.27) aus einer Summe zusammensetzt, lässt sich jeder Summand einzeln betrachten. Für den λ-ten Summanden folgt

$$\int_t^{t_2} \frac{(\tau - t)^{\alpha_n - \lceil \alpha_n \rceil + 1 + \lambda} \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}^{(o+2-\lambda)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda}}{(\tau - t)^{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor}} \mathrm{d}\tau = \int_t^{t_2} (\tau - t)^{\lambda} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda} \mathrm{d}\tau \tag{4.30}$$

unter Vernachlässigung der von τ unabhängigen Ausdrücke. Wie im Beweis des Lemmas 4.4 lässt sich (4.30) in die beiden Funktionen f (4.18) und g (4.19) aufteilen. Die Funktion g entspricht wieder der Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52), die nach [PR93a, S. 6] o-fach stetig differenzierbar ist. Damit für jeden Summanden aus (4.27) die Ableitung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion existiert, muss $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ gelten.

Die Anwendung der partiellen Integration führt auf

$$\int_t^{t_2} (\tau - t)^{\lambda} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda} \mathrm{d}\tau = \left[(\tau - t)^{\lambda} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda+1)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda+1} \right]_{\tau=t}^{t_2} - \lambda \int_t^{t_2} (\tau - t)^{\lambda-1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda+1)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda+1} \mathrm{d}\tau. \tag{4.31}$$

Zunächst wird der erste Ausdruck in (4.31), der der Stammfunktion entspricht, für die beiden Grenzen $\tau = t$ und $\tau = t_2$ betrachtet. Für die Obergrenze $\tau = t_2$ gilt

$$(t_2 - t)^{\lambda} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda+1)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda+1} \Bigg|_{\zeta=t_2} = 0. \tag{4.32}$$

Dies folgt direkt aus (4.23). Da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ sowie $\lambda \leq o$ gilt und folglich $o + 2 - \lambda + 1 > 2$, wird die Spline-Type-Modulationsfunktion mindestens zweifach integriert, wodurch die Obergrenze

zu Null wird. Für die Untergrenze $\tau = t$ wird die Stammfunktion in (4.31) ebenfalls aufgrund von $(\tau - t)$ Null. Damit ist der erste Ausdruck in (4.31) Null und muss nicht weiter betrachtet werden.

Auf den zweiten Ausdruck in (4.31) wird erneut die partielle Integration angewendet. Unter Berücksichtigung, dass der erste Ausdruck in (4.31) zu Null wird, folgt nach λ-facher Anwendung der partiellen Integration

$$\begin{aligned} &\int_t^{t_2} (\tau - t)^\lambda \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda} \mathrm{d}\tau = \\ &\lambda! \int_t^{t_2} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2} \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die rechtsseitige Ableitung nach Caputo der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion reduziert sich nach (4.33) auf die Integration der Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52). Es gilt, dass die Spline-Type-Modulationsfunktion und deren Integrale außerhalb des Intervalls $t \in [t_1, t_2]$ per Definition Null ist [PR93a, S. 6], [PR93b]. Daraus folgt, dass (4.33) unabhängig des Zeitpunkts t mit $t < t_1$ und des Summanden λ zu Null wird. Folglich besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) die Eigenschaft $(P4)$, falls $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ gilt. □

Mit den Lemmata 4.4 und 4.6 ist gezeigt, dass die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 ist und zusätzlich die Eigenschaft $(P4)$ aus Lemma 4.2 erfüllt. Bei Anwendung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) wird der Einfluss der Initialisierungsfunktion auf die Parameteridentifikation eliminiert.

Im Gegensatz zur Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52) muss neben der Anzahl der Impulse s und der Ordnung o noch der zu betrachtende Zeitpunkt τ für die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) angegeben werden. Aus der Identifikationsgleichung (4.3) für initialisierte FDGLn folgt, dass der zu betrachtende Zeitpunkt $\tau = t_1$ ist, um das gesamte Intervall des Modulationsfunktionsverfahren zu berücksichtigen. Offen ist noch die Frage nach der Wahl der Anzahl der Impulse s und der Ordnung o. Aus [PR93a, S. 13] geht hervor, dass die Anzahl der Impulse s deutlich größer als die Ordnung des Systems gewählt werden sollte. Dies hängt damit zusammen, dass die Modulationsfunktion entsprechend der Systemordnung häufig abgeleitet werden muss und die maximale Ordnung $o_{\max}$ der Spline-Type-Modulationsfunktion von der Anzahl der Impulse mit $o_{\max} = s - 2$ zusammenhängt. Falls die maximale Ordnung $o_{\max}$ der Spline-Type-Modulationsfunktion kleiner als die Systemordnung ist, verliert die Spline-Type-Modulationsfunktion die notwendigen Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$. Außerdem verbessert sich die Tiefpassfiltereigenschaft mit zunehmender Anzahl an Impulse. Ebenfalls in [PR93a, S. 13] wird für die Ordnung $o = s - 2$ empfohlen, sodass entsprechend der Anzahl der Impulse s viele Integrationen ausgeführt werden. In einer praktischen Anwendung sind die kontinuierlichen Integrale numerisch zu evaluieren. Aufgrund der numerischen Integration ergibt sich ein Fehler, der sich mit der Anzahl an Integrationen aufsummiert. Aus diesem Grund

ist für die Anwendung ein Kompromiss zwischen der Filtereigenschaft und dem numerischen Fehler einzugehen.

Bei der numerischen Umsetzung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion ist zudem darauf zu achten, dass die Impulse auf einem Abtastschritt liegen müssen. Falls dies nicht der Fall ist, gilt die Eigenschaft nicht mehr, dass die Spline-Type-Modulationsfunktion außerhalb der Integralgrenzen per Definition Null ist. Dies ist jedoch nach (4.33) essentiell, damit die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ besitzt.

Beispiel 4.1:

In diesem Beispiel wird anhand zweier gewichteter Spline-Type-Modulationsfunktionen mit den Ableitungsordnungen $\alpha_1 = 0{,}7$ und $\alpha_2 = 1{,}2$ demonstriert, dass die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ besitzt. Dafür wird die Untergrenze des Modulationsfunktionsverfahren zu $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, wodurch $\tau = 10\,\mathrm{s}$ folgt, und die Obergrenze zu $t_2 = 20\,\mathrm{s}$ gewählt. Die Anzahl der Impulse wird auf $s = 10$ und die Ordnung $o = 5$ festgelegt, um einen Kompromiss zwischen der Filtereigenschaft und numerischen Fehler zu erzielen. Die Abtastzeit beträgt $T = 0{,}01\,\mathrm{s}$, wodurch die Impulse mit Abtastpunkten zusammenfallen. Die beiden gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktionen (4.17) *und deren rechtsseitige Ableitung nach Caputo sind in der Abbildung 4.1 dargestellt.*

Zu den Verläufen ist anzumerken, dass alle zum Zeitpunkt $t = t_1$ nicht Null werden. Jedoch ist selbst die größte Abweichung zum Zeitpunkt $t = t_1$ kleiner als 10^{-14} und daher vernachlässigbar klein. Zudem verringern sich alle Abweichungen mit abnehmender Zeit, die aufgrund der rechtsseitigen Ableitung betrachtet werden muss.

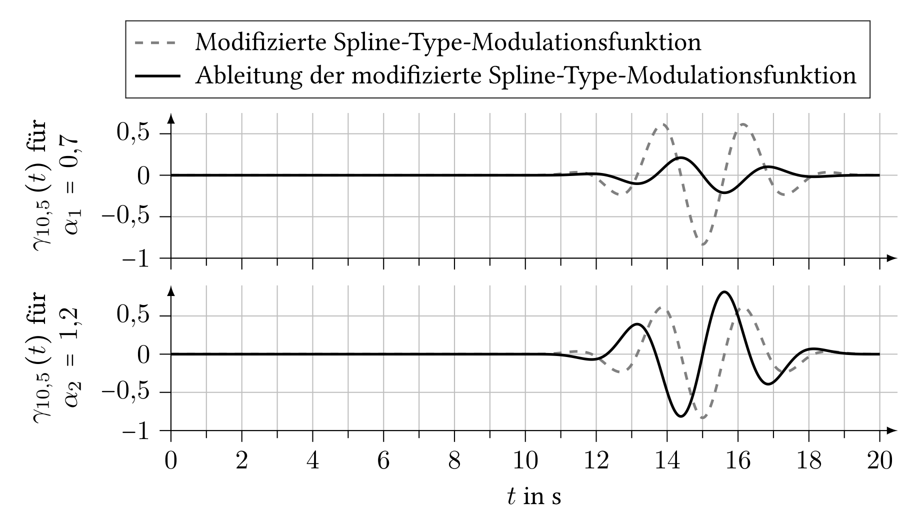


Abbildung 4.1: Grafische Darstellung zweier modifizierter Spline-Type-Modulationsfunktionen und deren Ableitungen für $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ und $t_2 = 20\,\mathrm{s}$

4.1.3 Numerische Umsetzung des Modulationsfunktionsverfahrens

Eine weitere Anforderung, die im Zusammenhang mit der Forschungsfrage gestellt wird, ist die numerischen Umsetzbarkeit des Identifikationsverfahrens. Jedoch erfordert die Evaluierung von (4.3) zum einen die Berechnung des kontinuierlichen Ableitungsoperators nach Caputo und zum anderen die Evaluierung von kontinuierlichen Integralen. Diese beiden Aspekte machen eine numerische Approximation notwendig.

Zunächst wird der Ableitungsoperator nach Caputo betrachtet. Dieser kann aufgrund der Eigenschaft $(P2)$ der Modulationsfunktion durch die Definition nach Riemann-Liouville ersetzt werden, da diese Eigenschaft die Summe im Zusammenhang der beiden Definitionen (3.12) eliminiert (siehe Lemma 3.1). Wenn sichergestellt wird, dass die ganzzahligen Ableitungen der Modulationsfunktionen bis zur Ableitungsordnung $\lceil \alpha_n \rceil$ integrierbar sind, sind außerdem die Definitionen nach Riemann-Liouville und Grünwald-Letnikov identisch (siehe Lemma 3.2). Durch Wahl einer festen Abtastzeit lässt sich der Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov numerisch umsetzen (siehe Definition 3.5).

Für die numerische Approximation der Integrale des Modulationsfunktionsverfahrens in (4.13) und (4.14) wird angenommen, dass eine diskrete Beobachtung $y(t_s)$ mit $t_s = t_{a,h} + sT$, $\mathcal{S} := \{ s \in \mathbb{N}_0 | \, s \leq r \}$ und $s \in \mathcal{S}$ vorliegt. Weiterhin wird angenommen, dass die Integrale mit einer interpolatorischen Quadraturformel approximiert werden [Zei13, S.898 ff.]. Die Anwendung der Quadraturformel führt beispielhaft für den Summanden, der die α_i-te Ableitungsordnung in (4.3) beschreibt, zu

$$\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \; {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\alpha_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t = T \sum_{s=0}^{r} P(s) \, \tilde{y}(t_s) \; {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\alpha_i} \gamma(t) \Big|_{t=t_s} + F_y \tag{4.34}$$

mit den Gewichtungen der Integrationsapproximationsmethode P und dem numerischen Fehler F_y, wenn die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt.

Lemma 4.7 (Numerischer Fehler des Modulationsfunktionsverfahren)
Sei γ eine Modulationsfunktion entsprechend Definition 3.11 mit der Eigenschaft $(P4)$, der Messvektor $\boldsymbol{z}$ mit (4.13) *und die Messmatrix $\boldsymbol{M}$ mit* (4.14) *entsprechend Lemma 4.3. Der numerische Fehler F_y durch die Approximation des Integrals in dem Messvektor $\boldsymbol{z}$ und in der Messmatrix $\boldsymbol{M}$ durch eine interpolatorischen Quadraturformel und des Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov in dem Messvektor $\boldsymbol{z}$ und in der Messmatrix $\boldsymbol{M}$ geht gegen Null, wenn die $\lceil \alpha_n \rceil$-fache Ableitung der Modulationsfunktion γ integrierbar ist und die Abtastzeit T gegen Null geht.*

Beweis:
Der rechtsseitige Ableitungsoperator nach Caputo kann in dem Messvektor $\boldsymbol{z}$ und in der Messmatrix $\boldsymbol{M}$ durch den rechtsseitigen Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov ersetzt werden, wenn die $\lceil \alpha_n \rceil$-fache Ableitung der Modulationsfunktion γ integrierbar ist. Der Fehlerterm durch die zeitdiskrete Approximation des Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov (3.20) lässt sich durch $\mathcal{O}(T)$ abschätzen und ist somit proportional zur Abtastzeit (siehe Definition 3.5), sodass dieser mit einer kleiner werdenden Abtastzeit ebenfalls kleiner wird [Pod98, S. 204 ff.].

Der Fehlerterm der Integralapproximation F_y hängt von der gewählten Methode ab. So geht beispielsweise bei der Trapezregel die Abtastzeit mit dritter Ordnung [Zei13, S. 899]

$$F_{y,\mathrm{Trapez}}\left[f\right] = -\frac{T^3}{12} f^{(2)}\left(x\right) \tag{4.35}$$

ein. Daraus folgt

$$\lim_{T\to 0} F_{y,\mathrm{Trapez}}\left[f\right] = -\lim_{T\to 0} \frac{T^3}{12} f^{(2)}\left(x\right), \tag{4.36}$$

dass der Fehler durch Anwendung der interpolatorischen Quadraturformel mit abnehmender Abtastzeit gegen Null geht [Zei13, S. 899]. Damit verschwinden beide Fehlerterme für den Grenzwert $T \to 0$. □

Genauso wie für das Modulationsfunktionsverfahren müssen zur Bestimmung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) Integrale berechnet werden.

Lemma 4.8 (Numerischer Fehler der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion durch Quadraturformel)

Sei γ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion entsprechend (4.17).
Der numerische Fehler F_γ durch Anwendung einer interpolatorischen Quadraturformel für die in der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *auftretenden Integrale geht gegen Null, wenn die Abtastzeit T gegen Null geht.*

Beweis:
Der Beweis folgt analog zum Beweis des Lemmas 4.7 [Zei13, S. 899]. □

Nach Lemma 4.7 und Lemma 4.8 lässt sich der Fehler, der durch die numerische Integration entsteht, durch eine Verringerung der Abtastzeit minimieren. Dem gegenüber steht der Rechenaufwand zur Evaluierung der einzelnen Gleichungen (4.34) mit einer kleineren Abtastzeit T steigt die Anzahl der notwendigen Multiplikationen $r + 1$ aufgrund des Zusammenhangs $r = {(t_{e,h} - t_{a,h})}/{T}$.

Beispiel 4.2:

In diesem Beispiel wird anhand einer Simulation gezeigt, dass die Parameter eines fraktionalen Systems mit dem Modulationsfunktionsverfahren für ein sich zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindlichen Systems korrekt identifiziert werden, sofern die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt. Dafür wird das fraktionale System

$${}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,8} y\left(t\right) + a_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,4} y\left(t\right) + a_0 y\left(t\right) = b_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,5} u\left(t\right) + b_0 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,1} u\left(t\right) \tag{4.37}$$

mit den zu identifizierenden Parametern $a_1 = 2$, $a_0 = 3$, $b_1 = 1$ und $b_0 = 4$ betrachtet. Das System befindet sich vor dem Beginn der Anregung $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ in Ruhe. Die Parameteridentifikation wird zum Zeitpunkt $t_1 = 15\,\mathrm{s}$ (Abbildung 4.2 (gepunktete Linie)) mit einem Identifikationshorizont von $T_i = 30\,\mathrm{s}$ gestartet. Die gesamte Simulationsdauer beträgt $T_{ges} = 60\,\mathrm{s}$ und die Abtastzeit wird gemäß Lemma 4.7 zu $T = 0{,}01\,\mathrm{s}$ gewählt. Als Anregungssignal u wird Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer Amplitude von 1 und einem Sprungabstand von $1\,\mathrm{s}$ verwendet. Das Anregungssignal u ist in der Abbildung 4.2 (oben) und das zugehörige Ausgangssignal y in der Abbildung 4.2 (unten) dargestellt.

Die Integrale der Identifikationsgleichung (4.3) *werden mit der Trapezregel [Zei13, S. 899] approximiert. Die Intervallgröße wird dafür gleich der Abtastzeit T gewählt. Die unabhängigen Gleichungen werden entsprechend Lemma 4.3 aus dem Verschieben des Integrationsintervalls erzeugt. Das erste Intervall ist $[15\,\mathrm{s}, 45\,\mathrm{s}]$ basierend auf dem gewählten Startzeitpunkt t_1 und dem Identifikationshorizont T_i. Für die weiteren Gleichungen wird das Intervall jeweils um $T_\Delta = 3\,\mathrm{s}$ verschoben. Dadurch ergibt sich das zweite Intervall $[18\,\mathrm{s}, 48\,\mathrm{s}]$ für die Identifikationsgleichung. Nachdem vier Gleichungen entsprechend der Anzahl der Unbekannten erzeugt wurden, wird erstmalig das lineare Gleichungssystem* (4.12) *mittels der LS-Methode* (3.60) *gelöst. Dieses stellt die erste Iteration dar. Für die folgenden Iterationen wird das Intervall wie beschrieben verschoben. Die sich neu ergebende Gleichung wird zu dem Gleichungssystem hinzugefügt und dieses erneut mit* (3.60) *gelöst.*

Für die Parameteridentifikation wird sowohl die gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion als auch eine Polynom-Modulationsfunktion, deren Definition im Anhang D angegeben ist, eingesetzt. Durch die Wahl der Parameter der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion zu $s = 10$ und $o = 5$ besitzt die gewählte Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P1)$, da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ und $s \geq o + 2$ gilt. Da zudem $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft $(P4)$. Die Polynom-Modulationsfunktion hingegen besitzt die Eigenschaft $(P4)$ nicht. Die identifizierten Parameter sind in der Abbildung 4.3 über der Iteration aufgetragen. Die gewählten Parameter $\boldsymbol{p}$ des Systems (4.37) *sind als grau gestrichelte Linie eingezeichnet. Die Identifikationsergebnisse $\hat{\boldsymbol{p}}$, die mit der Anwendung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion erzielt werden, sind als durchgezogene Linie und die mit der Polynom-Modulationsfunktion bestimmten Parameter als gepunktete Linie abgebildet. Aufgrund der Abwesenheit von Rauschen werden die Parameter bei Anwendung der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion mit der kleinsten Anzahl an notwendigen unabhängigen Gleichungen richtig identifiziert [IM11, S. 226]. Dahingegen werden die Parameter mit der Polynom-Modulationsfunktion auch bei steigender Anzahl an unabhängigen Gleichungen nicht korrekt identifiziert. Dieses Beispiel macht somit auch deutlich, dass das Ignorieren der Anforderung (b) „System in Ruhe" bei den Verfahren aus dem Stand der Technik zu fehlerhaften Identifikationsergebnissen führt. Erst mit der Eigenschaft $(P4)$ der Modulationsfunktion werden korrekte Ergebnisse erzielt.*

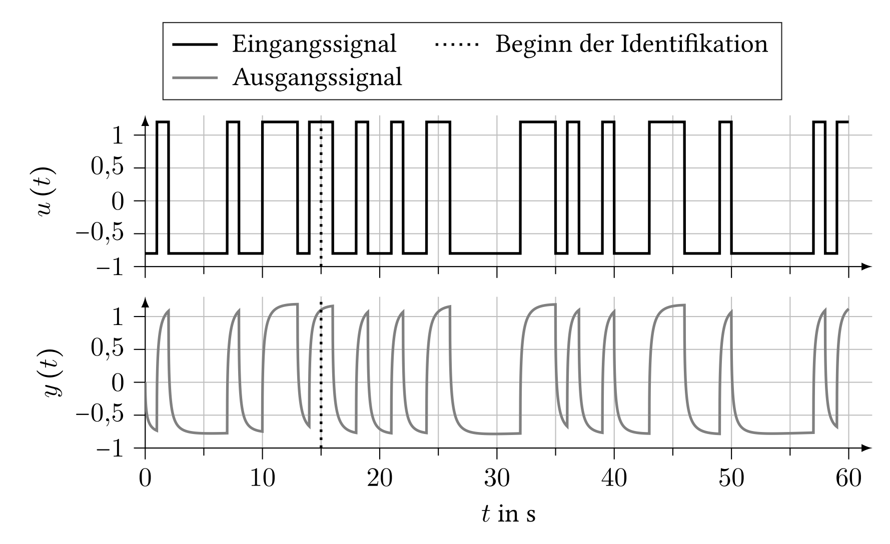


Abbildung 4.2: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und das resultierende Ausgangssignal (unten) für die Parameteridentifikation eines initialisierten Systems

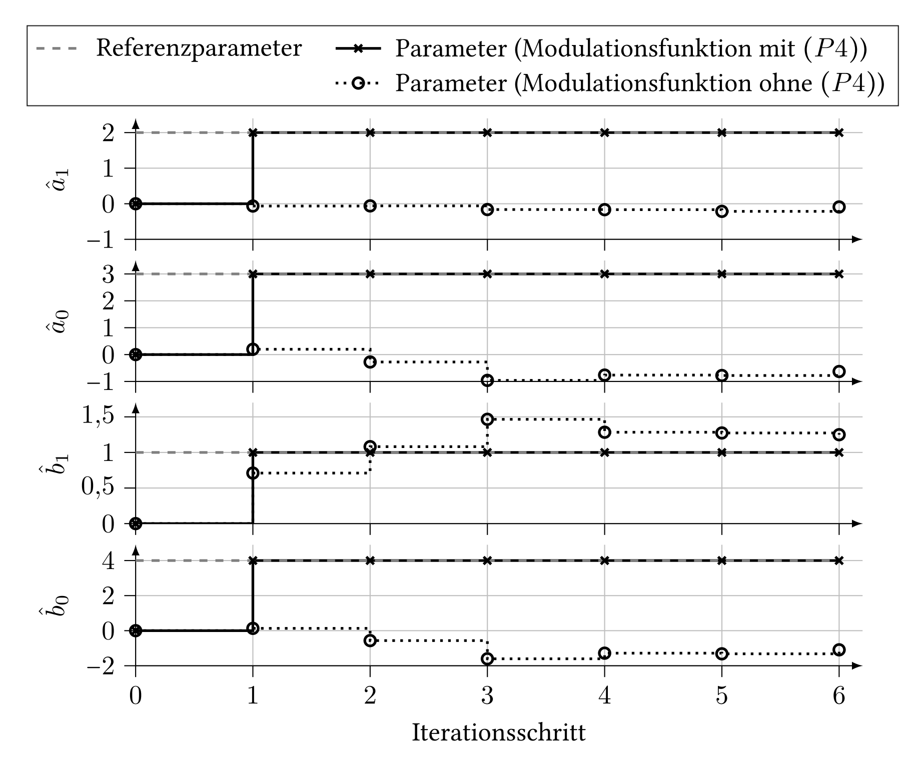


Abbildung 4.3: Vergleich der Parameteridentifikationsergebnisse zwischen der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion, die die Eigenschaft $(P4)$ besitzt, und einer Polynom-Modulationsfunktion, die die Eigenschaft $(P4)$ nicht besitzt

4.2 Modulationsfunktionsverfahren für zeitvariante fraktionale Systeme

In diesem Abschnitt wird die zeitvariante FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)\, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{4.38}$$

betrachtet, deren zeitabhängige Parameter sich als Polynomfunktionen

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^{N_{a,i}} a_{i,j} t^j \tag{4.39}$$

$$b_k(t) = \sum_{j=0}^{N_{b,k}} b_{k,j} t^j \tag{4.40}$$

mit $N_{a,i}, N_{b,k} \in \mathbb{N}_0$ beschreiben lassen. Zudem wird angenommen, dass sich die Parameter erst ab $t \geq t_0$ ändern und vor $t = t_0$ konstant $a_i = a_{i,0}$ und $b_k = b_{k,0}$ sind. Für die Parameteridentifikation wird das Modulationsfunktionsverfahren auf diese Klasse (4.38) mit (4.39) und (4.40) von fraktionalen Systemen erweitert.

4.2.1 Identifikationsgleichung

Für die FDGL (4.38) mit den Parametern der Form (4.39) und (4.40) ergibt sich die im Lemma 4.9 dargestellte Identifikationsgleichung, wobei die Normierung $a_{n,0} = 1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit entsprechend der Annahme 3.1 gilt.

Lemma 4.9 (Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens für zeitvariante FDGLen)
Sei $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < t_2$, γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11, die zeitvariante FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)\, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{4.41}$$

mit Parametern entsprechend (4.39) und (4.40) und $N_{a,i}, N_{b,k} \in \mathbb{N}$ der Grad des zum Parameter $a_i(t)$ beziehungsweise $b_k(t)$ gehörenden Polynoms.
Die Identifikationsgleichung, die sich aus der Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens auf die zeitvariante FDGL ergibt, ist

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{N_{a,i}} a_{i,j} \left(\int_{t_1}^{t_2} y(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i} \left(t^j \gamma(t) \right) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i} \left(t^j \gamma(t) \right) \mathrm{d}t \right) = \\ &\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{N_{b,k}} b_{k,j} \left(\int_{t_1}^{t_2} u(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k} \left(t^j \gamma(t) \right) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k} \left(t^j \gamma(t) \right) \mathrm{d}t \right). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zu den Schritten, die im Beweis des Lemmas 3.10 durchgeführt wurden. Bei Anwendung der fraktionalen partiellen Integration werden die Unabhängigen des Polynoms t^j und die Modulationsfunktion als eine zeitgewichtete Modulationsfunktion

$$\gamma_j(t) = t^j \gamma(t) \tag{4.43}$$

aufgefasst. Unter der Annahme, dass die Randwerte der zeitgewichteten Modulationsfunktion entsprechend der Definition 3.11 der Modulationsfunktion verschwinden, ergibt sich direkt die Identifikationsgleichung für zeitvariante FDGLen. □

4.2.2 Eigenschaft zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses

Wie im Abschnitt 4.1.1 kann durch Anwendung des Modulationsfunktionsverfahren ausgenutzt werden, dass zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses eine zusätzliche Eigenschaft für die zeitgewichtete Modulationsfunktion (4.43) gefordert werden kann.

Lemma 4.10 (Eigenschaft der Modulationsfunktion zur Eliminierung der Initialisierungsfunktion für zeitvariante fraktionale Systeme)
Sei $t_0, t_1, t_2, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < t_2$, γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 und seien α_i, β_k die Ableitungsordnungen der FDGL (4.2).
Der Einfluss der Initialisierungsfunktion in der Identifikationsgleichung für zeitvariante fraktionale Systeme (4.42) *wird eliminiert, wenn die zeitgewichtete Modulationsfunktion $\gamma_j(t) = t^j \gamma(t)$* (4.43) *die Eigenschaft*

$$(P5) \; : \; \begin{cases} {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\alpha_i} \gamma_j(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ {}_t\mathrm{d}C_{t_2}^{\beta_k} \gamma_j(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

im Intervall $t \in [t_0, t_1]$ besitzt.

Beweis:
Der Beweis folgt direkt durch Einsetzen von (4.44) in (4.42). □

Der Einfluss der Initialisierungsfunktion wird mit der Eigenschaft $(P5)$ eliminiert. Jedoch wird der Zeitpunkt t_0 benötigt, ab dem sich die Parameter nach (4.39) und (4.40) ändern. Falls dieser bekannt ist, kann ein lineares Gleichungssystem für die Parameteridentifikation wie im Lemma 4.11 aufgestellt werden.

Lemma 4.11 (Lineares Gleichungssystem zur Parameteridentifikation im zeitvarianten Fall)
Sei $N_{a,i}, N_{b,k} \in \mathbb{N}_0$,

$$a_n(t)\,{}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_n} y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\,{}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)\,{}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{4.45}$$

die FDGL mit den zeitabhängige Parameter

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^{N_{a,i}} a_{i,j} t^j \tag{4.46}$$

$$b_k(t) = \sum_{j=0}^{N_{b,k}} b_{k,j} t^j, \tag{4.47}$$

$q \geq n+m+1$, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}$, $h \in \mathcal{H}$, $t, t_0, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$, $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$ *und sei* γ_j *eine zeitgewichtete Modulationsfunktion* (4.43) *mit den Eigenschaften* $(P1)$ *und* $(P2)$ *entsprechend der Definition 3.11 und Eigenschaft* $(P5)$. *Das lineare Gleichungssystem*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p} \tag{4.48}$$

mit dem erweiterten Parametervektor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} := \big[&a_{n,1}, \ldots, a_{n,N_{a,n}}, \ldots, a_{0,0}, \ldots, a_{0,N_{a,0}},\\ &b_{m,0}, \ldots, b_{m,N_{b,m}}, \ldots, b_{0,0}, \ldots, b_{0,N_{b,0}}\big],\end{aligned} \tag{4.49}$$

dem Messvektor $\boldsymbol{z} := [z_0, \ldots, z_h, \ldots, z_q]^\top$ *mit*

$$z_h := \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_n} \gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.50}$$

und der Messmatrix $\boldsymbol{M} := [\boldsymbol{m}_0, \ldots, \boldsymbol{m}_h, \ldots, \boldsymbol{m}_q]^\top$ *mit*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_h^\top := \Bigg[&-\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_n}(t\gamma(t))\,\mathrm{d}t, \ldots, -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_n}\left(t^{N_{a,n}}\gamma(t)\right)\mathrm{d}t, \ldots,\\ &-\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_0}\gamma(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_0}\left(t^{N_{a,0}}\gamma(t)\right)\mathrm{d}t, \ldots,\\ &\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_m}\gamma(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_m}\left(t^{N_{b,m}}\gamma(t)\right)\mathrm{d}t, \ldots,\\ &\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_0}\gamma(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_0}\left(t^{N_{b,0}}\gamma(t)\right)\mathrm{d}t\Bigg]\end{aligned} \tag{4.51}$$

muss zur Identifikation der Parameter $a_{i,j}$ *und* $b_{k,j}$ *gelöst werden.*

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 4.3. □

Das lineare Gleichungssystem lässt sich für die Parameterbestimmung beispielsweise mittels der LS-Methode entsprechend Lemma 3.12 lösen [ALL15].

4.2.3 Wahl der Modulationsfunktion

Durch die zeitvarianten Parameter der Form (4.39) und (4.40) ist es nicht ausreichend, dass die Modulationsfunktion γ die Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$ erfüllt, sondern die zeitgewichtete Modulationsfunktion $\gamma_j(t) = t^j \gamma(t)$ (4.43) muss diese erfüllen. Weiterhin muss zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses die zeitgewichtete Modulationsfunktion (4.43) die Eigenschaft $(P5)$ besitzen. In dieser Arbeit wird die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) zum Aufstellen der zeitgewichteten Modulationsfunktion (4.43) eingesetzt. Die sich ergebende zeitgewichtete Modulationsfunktion

$$\gamma_j(t) = t^j (t-\tau)^{\alpha+1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2} \tag{4.52}$$

wird als zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion bezeichnet. Als Erstes wird die zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion bezüglich der Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$ entsprechend der Definition 3.11 untersucht.

Lemma 4.12 (Modulationsfunktionseigenschaften der zeitgewichteten Spline–Type-Modulationsfunktion)
Sei α_n die größte Ableitungsordnung eines fraktionalen Systems (3.45), *γ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.17) *und γ_j eine zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.52).
Die zeitgewichtete Modulationsfunktion γ_j erfüllt die Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$, wenn die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit der Ordnung $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ eingesetzt wird.

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 4.4. □

Wie im Abschnitt 4.1.2 wird zunächst die $\lceil \alpha \rceil$-fache Ableitung der zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion berechnet, da diese für die Überprüfung der Eigenschaft $(P5)$ aufgrund des anzuwendenden rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Caputo benötigt wird (siehe Lemma 4.10).

Lemma 4.13 (Ableitung der zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)

Sei $n, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $\gamma_{s,o}$ *eine Spline-Type-Modulationsfunktion* (3.52), γ *eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.17) *und* γ_j *eine zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.52).
Die Ableitung der zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n} \gamma_j(t) = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_1} t^j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_2} (t-\tau)^{\alpha+1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_3} \gamma_{s,o}(t) \tag{4.53}$$

mit

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_1} t^j = \begin{cases} \frac{j!}{(j-n_1)!} t^{j-n_1} & j \geq n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}, \tag{4.54}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_2} (t-\tau)^{\alpha+1} = \left(\prod_{\kappa=0}^{n_2-1} \alpha + 1 - \kappa\right) (t-\tau)^{\alpha+1-n_2}, \tag{4.55}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n_3} \gamma_{s,o}(t) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-n_3)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2-n_3} \tag{4.56}$$

und dem Multinomialkoeffizient [MN07, S. 79]

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}, \tag{4.57}$$

wenn $o \geq n_3$ *ist.*

Beweis:
Die zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.52) lässt sich in die drei Funktionen

$$f(t) := t^j, \tag{4.58}$$

$$g(t) := (t-\tau)^{\alpha+1} \quad \text{und} \tag{4.59}$$

$$h(t) := \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - t + t_1\right) \mathrm{d}t^{o+2} \tag{4.60}$$

aufteilen. Die Ableitungen der Funktionen f und g ergeben sich direkt aus der Potenzregel. Die Ableitung der Funktion h, die der Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52) $\gamma_{s,o}$ entspricht, ist im Beweis zum Lemma 4.5 mit (4.20) gegeben. Durch Anwendung der verallgemeinerten Leibniz-Regel für mehrere Faktoren[21] [deB05] folgt direkt die Berechnungsvorschrift (4.53). □

[21] Nähere Informationen zur verallgemeinerten Leibniz-Regel sind im Anhang E gegeben.

Aufbauend auf der Ableitung (4.53) der zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.52) wird diese Modulationsfunktion (4.52) auf die Eigenschaft $(P5)$ überprüft.

Lemma 4.14 (Eliminationseigenschaft der zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 4.12 gegeben.
Die zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.52) *erfüllt die Eigenschaften* $(P5)$, *wenn* $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ *ist.*

Beweis:
Der Ansatz erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 4.6. Für das Tripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ entsprechend den Ableitungsordnungen n_1, n_2 und n_3 in (4.53) ergibt sich

$$\int_t^{t_2} \frac{\tau^{j-\lambda_1} (\tau - t)^{\alpha_n - \lceil \alpha_n \rceil + 1 + \lambda_2} \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}^{(o+2-\lambda_3)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda_3}}{(\tau - t)^{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor}} \mathrm{d}\tau = \\ \int_t^{t_2} \tau^{j-\lambda_1} (\tau - t)^{\lambda_2} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda_3)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda_3} \mathrm{d}\tau \tag{4.61}$$

unter Vernachlässigung der von τ unabhängigen Ausdrücke. Für (4.61) gilt analog zu (4.30), dass $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ gelten muss, damit die Ableitung der Spline-Type-Modulationsfunktion $\gamma_{s,o}$ existiert [PR93a, S. 6]. Da stets $\lambda_3 \leq \lceil \alpha_n \rceil$ ist, folgt die Bedingung $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ für die Existenz der Ableitung. Das äußere Integral in (4.61) wird mittels der partiellen Integration gelöst. Dafür werden die Ergebnisse (4.31) – (4.33) im Beweis des Lemmas 4.6 verwendet. Damit folgt

$$\int_t^{t_2} \tau^{j-\lambda_1} (\tau - t)^{\lambda_2} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda_3)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda_3} = \\ (j - \lambda_1)! \lambda_2! \int_t^{t_2} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{t_1}^{t_2}}_{(o+2-\lambda_3+j-\lambda_1+\lambda_2)-mal} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \delta\left(j \frac{t_2 - t_1}{s} - \zeta + t_1\right) \mathrm{d}\zeta^{o+2-\lambda_3+j-\lambda_1+\lambda_2} \mathrm{d}\tau \tag{4.62}$$

nach $(j - \lambda_1 + \lambda_2)$-facher Anwendung der partiellen Integration. Da die Spline-Type-Modulationsfunktion und deren Integrale außerhalb des Intervalls $t \in [t_1, t_2]$ per Definition Null ist [PR93a, S. 6], besitzt die zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.52) die Eigenschaft $(P5)$, sofern $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ gilt. □

Beispiel 4.3:

In diesem Beispiel wird anhand einer Simulation gezeigt, dass die Parameter eines zeitvarianten fraktionalen Systems, die sich als Polynome entsprechend (4.39) *und* (4.40) *modellieren lassen, mit dem Modulationsfunktionsverfahren korrekt identifiziert werden. Die Parameteridentifikation wird für ein zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindliches System demonstriert, sodass eine Modulationsfunktion mit der Eigenschaft* $(P5)$ *eingesetzt werden muss. Als Beispielsystem wird das fraktionale System*

$$(1 + a_{1,1}t)\ {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,8} y(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{4.63}$$

mit den zu identifizierenden Parametern $a_{1,1} = 0{,}05$*,* $a_0 = 2$ *und* $b_0 = 0{,}5$ *betrachtet. Das System befindet sich vor dem Beginn der Anregung* $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ *in Ruhe. Die Parameteridentifikation wird zum Zeitpunkt* $t_1 = 15\,\mathrm{s}$ *(Abbildung 4.4 (gepunktete Linie)) mit einem Identifikationshorizont von* $T_i = 30\,\mathrm{s}$ *gestartet. Die gesamte Simulationsdauer beträgt* $T_{ges} = 60\,\mathrm{s}$ *und die Abtastzeit wird gemäß Lemma 4.7 zu* $T = 0{,}01\,\mathrm{s}$ *gewählt. Als Anregungssignal* u *wird Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer Amplitude von* 1 *und einem Sprungabstand von* $1\,\mathrm{s}$ *verwendet. Das Anregungssignal* u *ist in der Abbildung 4.4 (oben) und das zugehörige Ausgangssignal* y *in der Abbildung 4.4 (unten) dargestellt.*

Als Modulationsfunktion γ *in der zeitgewichteten Modulationsfunktion* γ_j (4.43) *wird die gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.17) *eingesetzt, sodass sich die zeitgewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion* (4.52) *ergibt. Durch die Wahl der Parameter der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion zu* $s = 10$ *und* $o = 5$ *besitzt die gewählte Modulationsfunktion die Eigenschaft* $(P1)$*, da* $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ *und* $s \geq o + 2$ *gilt. Da zudem* $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ *ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft* $(P5)$*.*

Die Integrale der Identifikationsgleichung (4.3) *werden mit der Trapezregel [Zei13, S. 899] approximiert. Die Intervallgröße wird dafür gleich der Abtastzeit* T *gewählt. Die unabhängigen Gleichungen werden entsprechend Lemma 4.3 aus dem Verschieben des Integrationsintervalls erzeugt. Das erste Intervall ist* $[15\,\mathrm{s}, 45\,\mathrm{s}]$ *basierend auf dem gewählten Startzeitpunkt* t_1 *und dem Identifikationshorizont* T_i*. Für die weiteren Gleichungen wird das Intervall jeweils um* $T_\Delta = 3\,\mathrm{s}$ *verschoben. Dadurch ergibt sich das zweite Intervall* $[18\,\mathrm{s}, 48\,\mathrm{s}]$ *für die Identifikationsgleichung. Nach dem Aufstellen einer Identifikationsgleichung für das lineare Gleichungssystem wird dieses mittels der LS-Methode in Blockverarbeitung* (3.60) *gelöst. Da kein Rauschen auf dem Ausgangssignal angenommen wird, werden der Parameteranzahl entsprechend viele Iterationen für die Identifikation benötigt [IM11, S. 226]. In diesem Beispiel sind es demnach drei Iterationen. Die Ergebnisse* $\hat{\boldsymbol{p}}$ *der einzelnen Iterationen sind in der Abbildung 4.5 dargestellt. Die vorgegebenen Parameter sind als grau gestrichelte Linie und die identifizierten Parameter als durchgezogene schwarze Linie eingezeichnet.*

Bei Anwendung der Polynom-Modulationsfunktion, die bereits im Beispiel 4.2 eingesetzt wird und die die Eigenschaft $(P5)$ *nicht besitzt, ergeben sich die als gepunktete Linie abgebildete Parameter* $\hat{\boldsymbol{p}}$*. Auch bei steigender Anzahl an unabhängigen Gleichungen werden die Referenzparameter* $\boldsymbol{p}$ *des Beispielsystems nicht korrekt identifiziert. Auch anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass das Ignorieren der Anforderung (b) „System in Ruhe“ zu fehlerhaften Identifikationsergebnissen führt.*

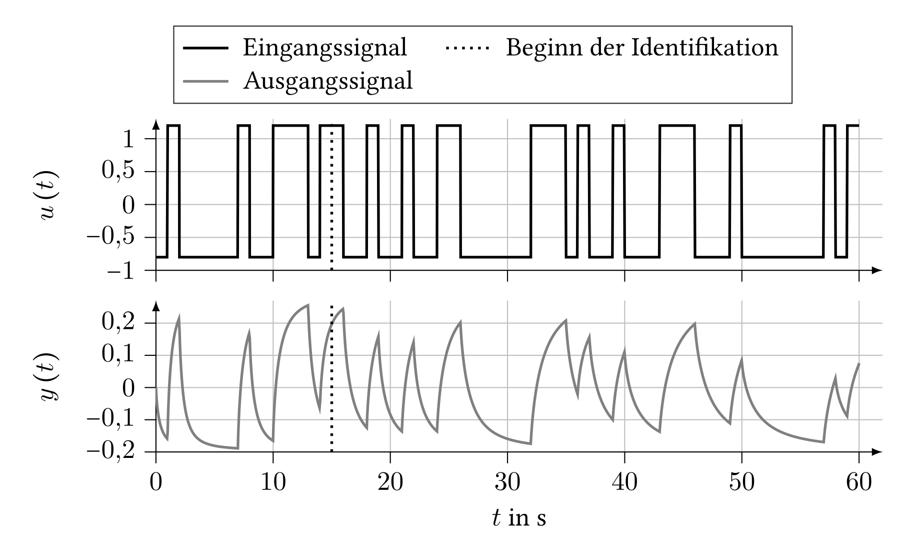


Abbildung 4.4: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und das resultierende Ausgangssignal (unten) für die Parameteridentifikation zeitvarianter fraktionaler Systeme

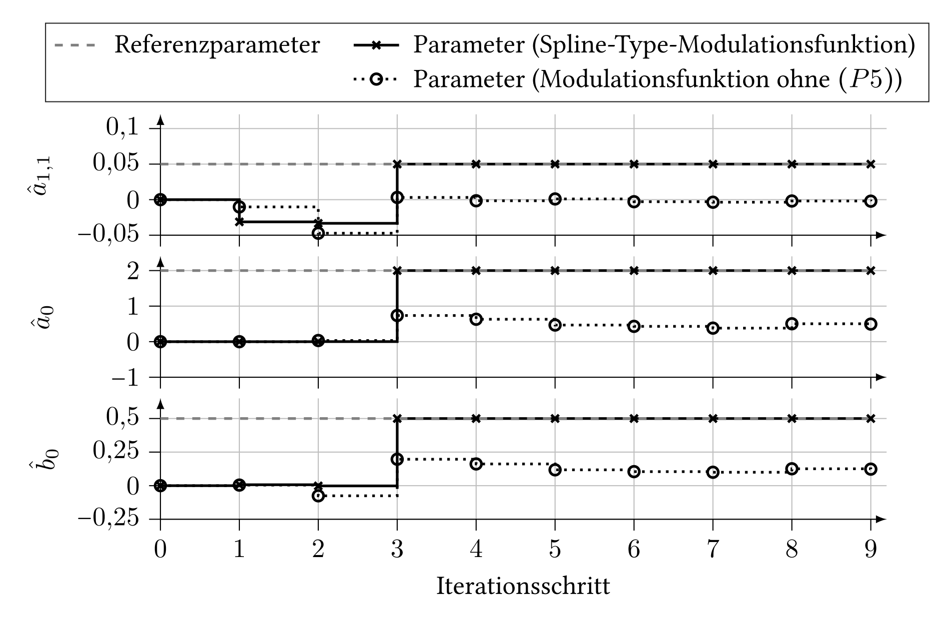


Abbildung 4.5: Iterative Parameterbestimmung eines zeitvarianten Systems, dessen Parameter sich als Polynomfunktion beschreiben lassen, mit der zeitgewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion, die die Eigenschaft $(P5)$ besitzt, und der Polynom-Modulationsfunktion, die die Eigenschaft $(P5)$ nicht besitzt

4.3 Erwartungstreue Parameteridentifikation bei verrauschtem Ausgangssignal

In diesem Abschnitt wird zusätzlich zur Initialisierungsfunktion ein mit Rauschen überlagertes Ausgangssignal der Form (3.46) bei der Parameteridentifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren für zeitinvariante fraktionale Systeme (4.1) berücksichtigt. Es wird angenommen, dass die Modulationsfunktion neben den beiden Eigenschaften $(P1)$ und $(P2)$ auch die zusätzliche Eigenschaft $(P4)$ besitzt. Durch die getroffene Annahme wird der Einfluss der Initialisierungsfunktion eliminiert (siehe Abschnitt 4.1). Im Abschnitt 3.3.3 wird zwar erläutert, warum die Anwendung der LS-Methode zur Parameteridentifikation im Modulationsfunktionsverfahren bei einem verrauschten Ausgangssignal prinzipiell zu einer biasbehafteten Parameterbestimmung führt, der Fehler ist aber bislang in der Literatur nicht analysiert worden. Dies erfolgt im Abschnitt 4.3.1. Außerdem wird untersucht, ob der Bias mittels der eingesetzten Modulationsfunktion reduziert werden kann. Um trotz verrauschtem Ausgangssignal eine konsistente Parameterschätzung zu erhalten, wird im Abschnitt 4.3.2 die Anwendung der IV-Methode zur Parameterbestimmung im Modulationsfunktionsverfahren untersucht.

4.3.1 Analyse des Identifikationsfehlers des Modulationsfunktionsverfahrens bei Anwendung der LS-Methode

In diesem Abschnitt wird das verrauschte Ausgangssignal

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon(t) \tag{4.64}$$

mit dem ungestörten Ausgangssignal y und dem Rauschen ε, das die Eigenschaften in Annahme 3.3 besitzt, betrachtet. Beim Aufstellen des Gleichungssystems (4.12) geht das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$ anstelle des unverrauschten Ausgangssignal y ein. Um dies zu kennzeichnen, wird $\tilde{\boldsymbol{z}}$ als Notation für den Messvektor und $\tilde{\boldsymbol{M}}$ für die Messmatrix verwendet. Falls das Gleichungssystems (4.12) mit $\tilde{\boldsymbol{z}}$ und $\tilde{\boldsymbol{M}}$ mittels der LS-Methode gelöst wird, weicht das Ergebnis $\tilde{\boldsymbol{p}}$ von den Parametern $\boldsymbol{p}$ des Systems ab, da der der LS-Methode zugrunde gelegte Gleichungsfehler (3.65) für die Parameter $\boldsymbol{p}$ nicht Null wird (siehe Abschnitt 3.3.3). Im nachfolgenden Lemma wird die sich ergebende Abweichung analysiert, bevor im Anschluss untersucht wird, ob die Abweichung mittels der Modulationsfunktion reduziert werden kann.

Lemma 4.15 (Bias der LS-Methode für das Modulationsfunktionsverfahren bei verrauschtem Ausgangssignal [SKKH18])

Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_i} \tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\beta_k} u(t)\,, \tag{4.65}$$

die FDGL mit $\tilde{y}$ das mit Rauschen ε überlagerte Ausgangssignals y (4.64), $q \geq n+m+1$, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}$, $h \in \mathcal{H}$, $t, t_0, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $t_{a,h} = t_0 + hT_\Delta$, $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$ und γ eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 mit der Eigenschaft $(P4)$.

Ferner sei

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{p}} \tag{4.66}$$

ein lineare Gleichungssystem entsprechend Lemma 4.3.
Wenn zum Lösen des linearen Gleichungssystems (4.66) *die LS-Methode in Blockverarbeitung* (3.60) *eingesetzt wird, resultiert der Bias* $\boldsymbol{\mu}$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}, \tag{4.67}$$

wobei $\boldsymbol{z}_\varepsilon = \left[z_{\varepsilon,0},\ \ldots,\ z_{\varepsilon,q}\right]^\top$ *mit*

$$\tilde{z}_{\varepsilon,h} := \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}C^{\alpha_n}_{t_{e,h}}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.68}$$

den Rauschanteil des Messvektors und $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \left[\boldsymbol{m}_{\varepsilon,0},\ \ldots,\ \boldsymbol{m}_{\varepsilon,h},\ \ldots,\ \boldsymbol{m}_{\varepsilon,q}\right]^\top$ *mit*

$$\boldsymbol{m}^\top_{\varepsilon,h} := \left[-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}C^{\alpha_{n-1}}_{t_{e,h}}\gamma(t)\,\mathrm{d}t,\ \ldots,\ -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}C^{\alpha_0}_{t_{e,h}}\gamma(t)\,\mathrm{d}t,\ 0,\ \ldots,\ 0\right]. \tag{4.69}$$

den Rauschanteil der Messmatrix ist.

Beweis:
Da sich das Rauschen additiv entsprechend (4.64) überlagert, wird im ersten Schritt der Messvektor $\tilde{\boldsymbol{z}}$ und die Messmatrix $\tilde{\boldsymbol{M}}$ des linearen Gleichungssystems (4.66) in zwei Anteile zerlegt. Der erste Anteil enthält die unverrauschten Größen $\boldsymbol{z}$ entsprechend (3.57) und $\boldsymbol{M}$ entsprechend (3.58). Der zweite Anteil beschreibt das Rauschen für den Messvektor $\boldsymbol{z}_\varepsilon = \left[z_{\varepsilon,0},\ \ldots,\ z_{\varepsilon,q}\right]^\top$ mit (4.68) und die Messmatrix $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \left[\boldsymbol{m}_{\varepsilon,0},\ \ldots,\ \boldsymbol{m}_{\varepsilon,q}\right]^\top$ mit (4.69). Dadurch ergibt sich (4.66) zu

$$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}_\varepsilon = \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{M}_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{p}}. \tag{4.70}$$

Anwenden der LS-Methode in Blockverarbeitung auf den unverrauschten Teil $\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{p}}$ des Gleichungssystems (4.70) resultiert in

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \left(\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{p}}\right). \tag{4.71}$$

Durch Einsetzen von (3.56) in (4.71) für $\boldsymbol{z}$ lassen sich die tatsächlichen Parameter des Systems $\boldsymbol{p}$ rekonstruieren

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \left(\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{p}}\right). \tag{4.72}$$

Der Schätzfehler ergibt sich aus (4.72) zu

$$\tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon\tilde{\boldsymbol{p}}\right). \tag{4.73}$$

Der Bias berechnet sich als letzter Schritt aus dem Erwartungswert des Schätzfehlers [IM11, S. 230 ff.]

$$\boldsymbol{\mu} := \mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{p}}\} - \boldsymbol{p} \tag{4.74}$$

$$= \mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right)^{-1} \boldsymbol{M}^\top \left(\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon \tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}. \tag{4.75}$$

□

Aus Lemma 4.15 folgt, dass die LS-Methode für verrauschte Ausgangsgrößen erwartungstreu ist, wenn (4.75) zu Null wird [IM11, S. 230]. Mit dem Satz von Slutsky [IM11, S. 230 ff.] wird der Erwartungswert in (4.75) wie folgt aufgetrennt:

$$\lim_{N\to\infty} \mu = \left(\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{1}{N+1}\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right\}\right)^{-1} \left(\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{1}{N+1}\boldsymbol{M}^\top \left(\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon \tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}\right). \tag{4.76}$$

Falls der Erwartungswert von $\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}$ zu Null wird, existiert die Inverse nicht mehr. Die Existenz der Inversen von $\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}$ wird für die Anwendung der LS-Methode gefordert. Folglich kann der Bias nur über den zweiten Ausdruck in (4.76) zu Null werden. Falls $\boldsymbol{M}^\top$ Null ist, ist ebenfalls die Voraussetzung für die LS-Methode verletzt. Somit ist nur noch der Ausdruck $\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{M}_\varepsilon \tilde{\boldsymbol{p}}$ zu untersuchen. Unter der Annahme, dass das Ausgangssignal verrauscht wird, gilt in der Regel $\boldsymbol{z}_\varepsilon \neq 0$ und $\boldsymbol{M}_\varepsilon \neq 0$. Damit $\tilde{\boldsymbol{p}}$ gerade den identifizierten Parametern $\boldsymbol{p}$ des Systems (4.66) entsprechen, muss $\boldsymbol{z}_\varepsilon = \boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{M}_\varepsilon = \boldsymbol{M}$ sein. In diesem Fall entspricht das Rauschen dem Ein- und Ausgangssignal des Systems. Dieses widerspricht sowohl der Annahme 3.3 als auch der Tatsache, dass nur das Ausgangssignal von Rauschen überlagert ist. Eine letzte Möglichkeit für die erwartungstreue Schätzung besteht darin, dass mittels der Modulationsfunktion der Bias eliminiert wird. Der Bias wird dann eliminiert, wenn entweder die Unter- und Obergrenze der Integrale des Modulationsfunktion gleich gewählt werden oder die rechtsseitigen Ableitungen der Modulationsfunktion zu Null werden. In beiden Fällen ist es gleichbedeutend, dass die Parameteridentifikation nicht mehr möglich ist, da dadurch sämtliche Ausdrücke auch in den unverrauschten Teilen des Messvektors $\boldsymbol{z}$ und in der Messmatrix $\boldsymbol{M}$ verschwinden. Daraus folgt, dass mittels dem Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der LS-Methode keine biasfreie Parameterschätzung erzielt wird, sofern das Ausgangssignal verrauscht ist. Ein Ansatz zur biasfreien Parameterschätzung wird im nächsten Abschnitt präsentiert.

4.3.2 Methode der Hilfsvariable für fraktionale Systeme

Im vorherigen Abschnitt ist der Bias (4.67) bestimmt worden, der sich durch Anwendung der LS-Methode im Modulationsfunktionsverfahren ergibt, wenn das Ausgangssignal mit Rauschen überlagert ist. Trotz der Modulationsfunktion als zusätzlicher Freiheitsgrad lässt sich keine allgemein gültige Eigenschaft vergleichbar zu $(P4)$ und $(P5)$ ableiten, um eine Eliminierung des Bias zu erreichen. Bei Systemen mit ganzzahligen Ableitungsordnungen wird für eine biasfreie Schätzung die IV-Methode verwendet. Diese hat den Vorteil, dass keine Kenntnis über die stochastischen Merkmale des Rauschens apriori bekannt sein müssen [Lju99, S. 224 ff.], [IM11, S. 302 ff.].

Für die IV-Methode wird wie für die LS-Methode ein lineares Gleichungssystem entsprechend Lemma 3.11 oder 4.3 aufgestellt. Der Ansatz der IV-Methode zum Lösen des Gleichungssystem basiert ebenfalls auf der Minimierung des quadratischen Gleichungsfehlers $\boldsymbol{e}$ mit (3.65). Der Unterschied zwischen der LS-Methode und der IV-Methode liegt in dem Lösungsansatz des Gleichungssystems. Anstelle der transponierten Messmatrix $\boldsymbol{M}$ wird in der Berechnungsvorschrift (3.60) die Transponierte einer Matrix von Hilfsvariablen $\boldsymbol{W}$ eingesetzt. Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{W}$ werden Hilfsvariablen genannt, wenn [IM11, S. 302]

$$\operatorname*{plim}_{q\to\infty} \boldsymbol{W}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{e} = 0 \tag{4.77}$$

$$\operatorname*{plim}_{q\to\infty} \boldsymbol{W}^{\mathsf{T}} \tilde{\boldsymbol{M}} \quad \text{positiv definit} \tag{4.78}$$

gilt, wobei $\boldsymbol{e}$ dem Gleichungsfehler, $\tilde{\boldsymbol{M}}$ der Messmatrix mit den verrauschten Ausgangssignalen $\tilde{y}$, q der Anzahl der Identifikationsgleichungen (4.3) und „plim" dem Operator für die Konvergenz in der Wahrscheinlichkeit entspricht [IM11, S. 685 f.].

Damit eine konsistente Parameterschätzung im quadratischen Mittel mit der IV-Methode erreicht wird, müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein [IM11, S. 304]:

(a) Die Anzahl der zu bestimmenden Parameter n und m müssen bekannt sein.
(b) Das Eingangssignal muss als unverrauschte Größe vorliegen.
(c) Der Gleichungsfehler $\boldsymbol{e}$ mit (3.65) muss den Erwartungswert Null $\mathrm{E}\{\boldsymbol{e}\} = 0$ besitzen.
(d) Der Gleichungsfehler $\boldsymbol{e}$ muss unkorreliert mit den Hilfsvariablen der Matrix $\boldsymbol{W}$ sein.

Die Bedingung (a), dass die Parameteranzahl bekannt ist, geht mit keiner Einschränkung einher. Die Parameteranzahl ergibt sich bei einer White-Box-Modellierung direkt aus dem Modellierungsprozess. Bei einer Black-Box-Modellierung wird die Anzahl der Parameter vorgegeben. Die Bedingung (b) wird durch die Annahme 3.5 in der Arbeit gesichert. Die Bedingung (c) hängt von dem Rauschen ab und die Bedingung (d) ist abhängig von der Wahl der Hilfsvariablen. Geeignete Hilfsvariablen sind nach [IM11, S. 302 f.] das bekannte Eingangssignal und eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals des Systems. Dies liegt daran, dass mit dieser Wahl die beiden Bedingungen (4.77) und (4.78) erfüllt werden.

Überprüfung der Bedingungen (c) und (d) der IV-Methode für das Modulationsfunktionsverfahren

In diesem Abschnitt wird als Erstes im Theorem 4.1 die Bedingung (c) für das Modulationsfunktionsverfahren unter Berücksichtigung der getroffenen Annahme 3.3 bezüglich der Eigenschaften des Rauschens analysiert. Anschließend wird überprüft, ob die Verwendung einer Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals als Hilfsvariable bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens ebenfalls unkorreliert zum Rauschen und somit eine sinnvolle Wahl für die Hilfsvariablen ist.

Theorem 4.1 (Erwartungswert des Gleichungsfehlers des Modulationsfunktionsverfahrens [SPKH20])
Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i}\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k}u(t) \tag{4.79}$$

die FDGL, $\tilde{y}(t)$ *eine Messung des mit Rauschen* $\varepsilon(t)$ *additiv überlagerten Ausgangssignals* $y(t), u(t)$ *das Eingangssignal,* $q \geq n+m+1, \mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}, h \in \mathcal{H}, t, t_1, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$, $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$, γ *eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 mit der Eigenschaft* $(P4)$ *und der aus dem Modulationsfunktionsverfahren resultierende Gleichungsfehler* $\boldsymbol{e} = [e_0, \ldots, e_h, \ldots, e_q]^\top$ *mit*

$$e_h = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \tilde{y}(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} b_k \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_k}\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.80}$$

Der Erwartungswert des Gleichungsfehlers des Modulationsfunktionsverfahrens ist

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{e}\} = 0, \tag{4.81}$$

wenn das Rauschen die Eigenschaften aus der Annahme 3.3 besitzt.

Beweis:
Als Erstes wird der Erwartungswert auf den Gleichungsfehler (4.80) angewendet. Durch die additive Überlagerung des Rauschens lässt sich der Gleichungsfehler in einen ungestörten Teil und einen Teil, der das Rauschen beinhaltet, auftrennen. Der ungestörte Teil summiert sich für die Parameter $\boldsymbol{p}$ des Systems zu Null auf, sodass nur der rauschabhängige Teil

$$\mathrm{E}\{e_h\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right\} \tag{4.82}$$

evaluiert werden muss. Durch Fubini's Theorem kann der Erwartungswert unter das Integral gezogen werden. Da die Modulationsfunktion γ frei wählbar ist, wird die Unkorreliertheit zum Störsignal angenommen, wodurch

$$\mathrm{E}\{e_h\} = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \mathrm{E}\{\varepsilon(t)\}\,{}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.83}$$

folgt. Aufgrund der ersten Eigenschaft (3.47) in der Annahme 3.3 verschwindet der Erwartungswert des Gleichungsfehlers. □

Damit wird die Bedingung (c) der IV-Methode bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens erfüllt. Ausstehend ist noch die Überprüfung der Bedingung (d), die nach (4.78) von den Hilfsvariablen abhängt. Die in der Arbeit eingesetzten Hilfsvariablen werden in der Definition 4.2 aufgestellt.

Definition 4.2 (Hilfsvariablen für das Modulationsfunktionsverfahren)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Theorem 4.1 gegeben und sei zusätzlich y_s eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals y des Systems (4.79).
Die Matrix der Hilfsvariablen $\boldsymbol{W} := [\boldsymbol{w}_0, \ldots, \boldsymbol{w}_h, \ldots, \boldsymbol{w}_q]^\top$ besteht aus den Vektoren

$$\boldsymbol{w}_h^\top := \left[-\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_{n-1}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t,\ \ldots,\ -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_0} \gamma(t)\,\mathrm{d}t \right. \\ \left. \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_m} \gamma(t)\,\mathrm{d}t,\ \ldots,\ \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\beta_0} \gamma(t)\,\mathrm{d}t \right]. \tag{4.84}$$

Um die Bedingung (d) für die Hilfsvariablen aus der Definition 4.2 zu überprüfen, wird das folgende Lemma benötigt und die im Anschluss getroffene Annahme 4.1 verwendet.

Lemma 4.16 (Standardabweichungen des Gleichungsfehlers und der Hilfsvariablen [SPKH20])
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Theorem 4.1 gegeben und sei zusätzlich y_s eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals des Systems (4.79) *und $\boldsymbol{W}$ die Matrix der Hilfsvariablen mit den Zeilenvektoren* (4.84).
Sowohl die Standardabweichung des Gleichungsfehlers σ_e als auch der Hilfsvariable σ_w sind endlich und nehmen von Null verschiedene Werte an.

Beweis:
Der Beweis ist im Anhang C.3 zu finden. □

Annahme 4.1 (Unkorreliertheit einer Schätzung des ungestörten Ausgangssignals mit Rauschen)
Sei $\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon(t)$ eine Beobachtung eines verrauschten Ausgangssignals mit dem unverrauschten Ausgangssignal y und dem Rauschen ε. Weiterhin sei y_s eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals y.
Es wird angenommen, dass die Schätzung y_s des ungestörten Ausgangssignals y unkorreliert zum Rauschen ε ist.

Mit dem Lemma 4.16 und der Annahme 4.1 wird die Bedingung (d) der IV-Methode für die Hilfsvariablen, die in der Definition 4.2 aufgestellt werden, untersucht.

Theorem 4.2 (Unkorreliertheit der Hilfsvariablen vom Rauschen [SPKH20])
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Theorem 4.1 gegeben und sei zusätzlich y_s eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals des Systems (4.79) *und $\boldsymbol{W}$ die Matrix der Hilfsvariablen mit den Zeilenvektoren* (4.84) *entsprechend der Definition 4.2.*
Ferner gilt für die Korrelation der Schätzung des ungestörten Ausgangssignals y_s mit dem Rauschen ε die Annahme 4.1.
Die Hilfsvariablen in der Matrix $\boldsymbol{W}$ sind für diese Voraussetzungen unkorreliert zum Rauschen ε.

Beweis:
Der Ausgangspunkt ist der Korrelationskoeffizient zwischen dem Gleichungsfehler e_h und den Hilfsvariablen $\boldsymbol{w}_h$

$$\rho_{e,w} = \frac{\mathrm{E}\left\{\left(e_h - \mathrm{E}\left\{e_h\right\}\right)\left(\boldsymbol{w}_h - \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{w}_h\right\}\right)\right\}}{\sigma_e \sigma_w} \tag{4.85}$$

mit den Standardabweichungen des Gleichungsfehlers σ_e und σ_w. Wenn der Korrelationskoeffizient zu Null wird, sind der Gleichungsfehler und die Hilfsvariable unkorreliert [Zei13, S. 821]. Dafür muss entweder der Zähler zu Null werden oder der Nenner gegen unendlich gehen. Aus Lemma 4.16 folgt direkt, dass der Nenner einen endlichen Wert annimmt. Aus diesem Grund ist der Zähler für die Analyse der Unkorreliertheit zu evaluieren. Da der Erwartungswert des Gleichungsfehlers $\mathrm{E}\left\{e_h\right\}$ nach (4.83) zu Null wird, ergibt sich

$$\rho_{e,w} = \frac{\mathrm{E}\left\{e_h \boldsymbol{w}_h\right\} - \mathrm{E}\left\{e_h \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{w}_h\right\}\right\}}{\sigma_e \sigma_w} \tag{4.86}$$

unter Ausnutzung der Linearität des Erwartungswerts. Da der Erwartungswert der Hilfsvariablen $\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{w}_h\right\}$ dem Beweis zu Lemma 4.16 folgend einen von Null verschiedenen endlichen Wert annimmt, kann dieser aus dem zweiten Ausdruck $\mathrm{E}\left\{e_h \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{w}_h\right\}\right\}$ ausgeklammert werden. Der Erwartungswert über den Gleichungsfehler $\mathrm{E}\left\{e_h\right\}$ ist nach (4.83) Null, wodurch der gesamte zweite Ausdruck zu Null wird.

Der noch übrig bleibende Ausdruck $\mathrm{E}\left\{e_h \boldsymbol{w}_h\right\}$ lässt sich aufteilen, da der Erwartungswert eines Vektors dem Erwartungswert der einzelnen Elemente entspricht und jeder Summand des Gleichungsfehlers aufgrund der Linearität des Erwartungswerts für sich evaluiert werden kann. Die nachfolgenden Schritte werden daher beispielhaft für das Element der Hilfsvariablen mit der α_i-ten Ableitungsordnung und dem Summand des Gleichungsfehlers mit der Ableitungsordnung α_j durchgeführt. Abschließend wird das Ergebnis auf alle Elemente des Hilfsvariablenvektors und Summanden des Gleichungsfehlers generalisiert. Für die beiden Ableitungsordnungen ergibt sich der Korrelationskoeffizient

$$\rho_{ej,wi} = \mathrm{E}\left\{ -\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_j} \gamma(t)\, \mathrm{d}t \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t \right\}. \tag{4.87}$$

Zur Evaluierung des Erwartungswerts wird aufgrund der Integrale die numerische Approximation aus dem Abschnitt 4.1.3 angewendet, womit (4.87) in

$$\begin{aligned}\rho_{ej,wi} = \mathrm{E}\Bigg\{ -\left(T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, \varepsilon(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha_j} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} + F_\varepsilon \right) \\ \left(T \sum_{s=0}^{r} Q(s)\, y_s(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha_i} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} + F_{ys} \right) \Bigg\}\end{aligned} \tag{4.88}$$

mit der Abtastzeit T, den einzelnen Abtastzeitpunkten t_s, den Gewichtungen P, Q der Methode zur Integrationsapproximation und den numerischen Fehlern F_ε, F_{ys} resultiert. Die Fehlerterme verschwinden nach Lemma 4.7 für den Grenzwert $T \to 0$. Für den nächsten Schritt wird einerseits ausgenutzt, dass der Erwartungswert linear ist. Andererseits gilt die Annahme, dass die Modulationsfunktion und deren Ableitungen unkorreliert zur Schätzung des Ausgangssignals und zum Rauschen sind. Dies wird wie im Beweis des Theorems 4.1 dadurch motiviert,

dass die Modulationsfunktion unabhängig von den Systemgrößen frei vorgebbar ist. Aufgrund dieser beiden Eigenschaften resultiert (4.88) in

$$\begin{aligned}\rho_{ej,wi} = -T^2 \sum_{s_1=0}^{r} \sum_{s_2=0}^{r} P(t_{s1})\, Q(t_{s2})\, \mathrm{E}\{\varepsilon(t_{s1})\, y_s(t_{s2})\} \\ \mathrm{E}\left\{ {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha_j}\gamma(t)\Big|_{t=t_{s1}}\ {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha_i}\gamma(t)\Big|_{t=t_{s2}} \right\}.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Aus (4.89) folgt, dass die α_j-te Ableitungsordnung des Gleichungsfehlers unkorreliert zu der α_i-ten Ableitungsordnung der Hilfsvariablen ist, wenn die Annahme 4.1 gilt, dass das Rauschen unkorreliert zu der verwendeten Schätzung des ungestörten Ausgangssignals ist.

Die Herleitung gilt für alle anderen Kombinationen der Ableitungsordnungen des Gleichungsfehlers und der Hilfsvariablen. Somit lässt sich die für die beiden beispielhaften Ableitungsordnungen getroffene Aussage folgendermaßen generalisieren. Der Gleichungsfehler ist unkorreliert zu den Hilfsvariablen, wenn das Rauschen unkorreliert sowohl zu der Schätzung des ungestörten Ausgangssignals als auch zu dem exakten Eingangssignal ist. □

Parameteridentifikation mit der Methode der Hilfsvariable für das Modulationsfunktionsverfahren

Unter der Annahme 4.1 ist mit den Theoremen 4.1 und 4.2 gezeigt, dass die IV-Methode die Parameter eines fraktionalen Systems bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens erwartungstreu schätzt, sofern eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals vorliegt. Die Parameter lassen sich unter dieser Voraussetzung entsprechend dem folgenden Theorem 4.3 bestimmen. Zur Unterscheidung der mit der IV-Methode ermittelten Parameter von den Parameter $\boldsymbol{p}$ des fraktionalen Systems werden diese durch $\hat{\boldsymbol{p}}$ gekennzeichnet.

Theorem 4.3 (Parameteridentifikation mittels der IV-Methode in Blockverarbeitung [SPKH20])

Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Theorem 4.1 gegeben und sei zusätzlich y_s eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals des Systems (4.79) *und $\boldsymbol{W}$ die Matrix der Hilfsvariablen mit den Zeilenvektoren* (4.84) *entsprechend der Definition 4.2. Weiterhin sei*

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{p} \tag{4.90}$$

das lineare Gleichungssystem (4.66) *entsprechend Lemma 4.2 und* $\operatorname{rang}\left(\tilde{\boldsymbol{M}}\right) = n + m + 1$. *Ferner gilt für die Korrelation der Schätzung des ungestörten Ausgangssignals y_s mit dem Rauschen ε die Annahme 4.1.*
Die Parameter $\boldsymbol{p}$ des fraktionalen Systems (3.55) *werden durch*

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \left[\boldsymbol{W}^{\top}\tilde{\boldsymbol{M}}\right]^{-1}\boldsymbol{W}^{\top}\tilde{\boldsymbol{z}} \tag{4.91}$$

bei Anwendung der Blockverarbeitung der IV-Methode geschätzt.

Beweis:
Entsprechend [IM11, S. 302] wird das lineare Gleichungssystem (4.90) mit der Transponierten der Matrix der Hilfsvariablen $\boldsymbol{W}$ linksseitig multipliziert:

$$\boldsymbol{W}^{\top}\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{W}^{\top}\tilde{\boldsymbol{M}}\hat{\boldsymbol{p}}. \tag{4.92}$$

Aufgrund der zweiten Bedingung der Hilfsvariablen (4.78) ist $\boldsymbol{W}^\top \tilde{\boldsymbol{M}}$ regulär. Mit der Invertierung der Matrix $\boldsymbol{W}^\top \tilde{\boldsymbol{M}}$ ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die Parameter (4.91). □

Neben der IV-Methode in Blockverarbeitung steht auch der rekursive Ansatz wie bei der LS-Methode zur Verfügung (siehe Lemma 3.13).

Lemma 4.17 (Parameteridentifikation mittels der rekursiven IV-Methode [IM11, S. 305])

Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Theorem 4.1 gegeben und sei zusätzlich y_s eine Schätzung des unverrauschten Ausgangssignals des Systems (4.79), $\boldsymbol{w}$ ein Vektor (4.84) der Matrix der Hilfsvariablen $\boldsymbol{W}$ gemäß der Definition 4.2, $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{(n+m+1)\times(n+m+1)}$ eine Einheitsmatrix und $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{(n+m+1)\times(n+m+1)}$ eine Kovarianzmatrix.
Die rekursive Berechnungsvorschrift der IV-Methode zur Parameteridentifikation $\hat{\boldsymbol{p}}$ für das Modulationsfunktionsverfahren ist mit den Gleichungen

$$\boldsymbol{K}_h = \frac{\boldsymbol{P}_h \boldsymbol{w}_{h+1}}{\boldsymbol{m}_{h+1}^\top \boldsymbol{P}_h \boldsymbol{w}_{h+1} + 1} \tag{4.93}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{h+1} = \hat{\boldsymbol{p}}_h + \left(z_{h+1} - \boldsymbol{m}_{h+1}^\top \hat{\boldsymbol{p}}_h\right) \tag{4.94}$$

$$\boldsymbol{P}_{h+1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_h \boldsymbol{m}_{h+1}^\top\right) \boldsymbol{P}_h \tag{4.95}$$

gegeben, wobei die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{P}_0$ für die erste Iteration vorzugeben ist.

Beweis:
Die allgemeinen Gleichungen der rekursiven IV-Methode sind in [IM11, S. 305] gegeben und die Gleichungen (4.93) – (4.95) für das Modulationsfunktionsverfahren ergeben sich durch Einsetzen der entsprechenden Größen. □

Mit der IV-Methode wird ein direkter Ansatz für die konsistente Schätzung mit dem Theorem 4.3 und dem Lemma 4.17 in dieser Arbeit präsentiert. Im Gegensatz zu bisherigen Ansätzen [DWHW16], [GLZ18], die auch verrauschte Ausgangssignale angenommen haben, wird keine Schätzung des Rauschens oder ein zusätzlicher Filterungsschritt vorgenommen. Mit den Theoremen 4.1 und 4.2 wird die Anwendbarkeit der IV-Methode für das Modulationsfunktionsverfahren gezeigt, wenn die Hilfsvariablen entsprechend der Definition 4.2 aufgestellt werden. Ein wesentlicher Punkt des Beweises zum Aufstellen der Hilfsvariablen, die im Theorem 4.2 betrachtet werden, ist, dass eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals vorliegt. In [IM11, S. 303] wird dafür ein simuliertes Ausgangssignal abhängig von den aktuellen Schätzparameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ vorgeschlagen. Um keine Einschränkung bezüglich der für die Forschungsfrage formulierten Anforderungen vorzunehmen, wird eine Simulationsvorschrift benötigt, die nicht ein System in Ruhe voraussetzt. Im Stand der Wissenschaft sind solche Simulationsansätze nicht bekannt (siehe Abschnitt 3.2.3). Daher wird im Kapitel 5 ein auf dem SMP basierender Ansatz zur Simulation von fraktionalen Systemen, die zu Simulationsbeginn nicht in Ruhe sind, präsentiert. Basierend auf dieser Simulationsvorschrift wird im Abschnitt 5.4 die Methode der Hilfsvariablen an einem Beispiel illustriert.

4.4 Zusammenfassung und Diskussion der Parameteridentifikationsverfahren

In diesem Kapitel wird erstmalig ein Modulationsfunktionsverfahren zur Parameteridentifikation fraktionaler Systeme vorgestellt, die sich nicht in Ruhe befinden. In diesem Fall müssen die fraktionalen Systeme mit Hilfe der initialisierten Ableitungsoperatoren beschrieben werden, weshalb der gesamte vergangene Ein- und Ausgangsverlauf des Systems zu berücksichtigen ist (siehe Abschnitt 3.1.3). Die in dieser Arbeit formulierte optionale Eigenschaft $(P4)$, die von der Modulationsfunktion gefordert wird (siehe Lemma 4.2), eliminiert den Einfluss der Initialisierung. Wie die Eigenschaft $(P3)$ schränkt auch die Eigenschaft $(P4)$ die Menge möglicher Modulationsfunktionen ein (siehe Abschnitt 3.3.3). Als Kandidat für eine Modulationsfunktion, die die zusätzliche Eigenschaft $(P4)$ besitzt (siehe Lemma 4.6), wird eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion in der Definition 4.1 vorgeschlagen.

Zudem wird ein Beitrag zur Parameteridentifikation zeitvarianter fraktionaler Systeme erbracht, deren zeitabhängige Parameter sich als Polynomfunktionen beschreiben lassen. Im Gegensatz zu den zeitinvarianten Systemen tritt bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahren eine zeitgewichtete Modulationsfunktion (4.43) in der Identifikationsgleichung auf (siehe Lemma 4.2.1). Bei der Betrachtung nicht in Ruhe befindlicher Systeme muss die zeitgewichtete Modulationsfunktion eine zur Eigenschaft $(P4)$ vergleichbare Eigenschaft $(P5)$ zur Eliminierung des Initialisierungseinflusses besitzen. Im Lemma 4.14 wird gezeigt, dass die zeigewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.52) diese Eigenschaft besitzt. Um jedoch die Änderungen der Parameter korrekt zu berücksichtigen, wird zusätzlich der Zeitpunkt benötigt, ab dem sich die Parameter ändern.

Die Erweiterung des Modulationsfunktionsverfahrens für nicht in Ruhe befindliche Systeme wird zunächst für den rauschfreien Fall hergeleitet. Der durch Rauschen hervorgerufene Fehler, der bei der Parameteridentifikation mittels der LS-Methode im Rahmen des Modulationsfunktionsverfahrens für zeitinvariante fraktionale Systeme entsteht, wird explizit berechnet (siehe Lemma 4.15). Damit wird gezeigt, dass die LS-Methode nicht erwartungstreu ist. Um dennoch eine konsistente Parameteridentifikation zu erhalten, wird in dieser Arbeit vorgeschlagen, an Stelle der LS-Methode die IV-Methode für die Parameteridentifikation innerhalb dem Modulationsfunktionsverfahren anzuwenden. Zum Aufstellen der Hilfsvariablen wird angenommen, dass eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals existiert. Wenn das Rauschen unkorreliert zu dieser Schätzung des ungestörten Ausgangssignals und mittelwertfrei ist, werden die Parameter des fraktionalen Systems mit dem Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der IV-Methode biasfrei identifiziert (siehe Abschnitt 4.3.2). Eine zentrale Anforderung der Forschungsfrage bezüglich der Parameteridentifikation ist, dass sich das System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befinden muss. Dies bedeutet, dass auch die Schätzung des ungestörten Ausgangssignals für ein nicht in Ruhe befindliches System erfolgen muss. Da im Stand der Wissenschaft keine Berechnungsvorschrift dafür existiert, wird im nächsten Kapitel 5 eine Simulationsvorschrift basierend auf dem SMP beschrieben, um diesen Fall abzudecken.

5 Short-Memory-Prinzip für fraktionale Systeme

Im vorherigen Kapitel wird eine Methode zur Parameteridentifikation für sich nicht in Ruhe befindliche fraktionale Systeme auf dem Modulationsfunktionsverfahren hergeleitet. Die Kombination mit der IV-Methode ermöglicht die konsistente Parameteridentifikation im Falle verrauschter Ausgangssignale. Entsprechend [IM11, S. 302] müssen die Hilfsvariablen dabei unkorreliert zum Rauschen und sollten möglichst stark korreliert zu dem Ein- und Ausgangssignal des Systems sein (siehe (4.77) und (4.78)). Daher wird als Hilfsvariable das ungestörte Eingangssignal und eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignal entsprechend Definition 4.2 vorgeschlagen. Bislang existiert jedoch lediglich ein Algorithmus zur Berechnung der geschlossenen Lösung, wenn das System zu Beginn der Simulation in Ruhe ist [Xue17, S. 113]. Dies liegt daran, dass stets die gesamte Systemhistorie zur exakten Berechnung des Ausgangssignals notwendig ist. Da aber mit voranschreitender Zeit der Einfluss zurückliegender Werte abnimmt, stellt sich die Frage, ob in Analogie zum SMP für Funktionen (siehe Abschnitt 3.1.4) ein SMP für fraktionale Systeme beschrieben werden kann. Ein solcher Ansatz wird im Abschnitt 5.1 präsentiert. Im Abschnitt 5.2 wird der Fehler des simulierten Ausgangssignals gegenüber dem Ausgangssignal des fraktionalen Systems berechnet, der sich durch die Verwendung des SMPs anstelle des gesamten vergangenen Funktionsverlaufs ergibt. Anschließend wird im Abschnitt 5.3 überprüft, welche Voraussetzungen vom fraktionalen System erfüllt sein müssen, damit dieser Fehler mit zunehmender Zeit gegen Null konvergiert. Die geschlossene Lösung basierend auf dem SMP stellt eine Antwort auf den letzten offenen Punkt aus Abschnitt 4.3.2, die Schätzung des ungestörten Ausgangssignals, dar. Somit lässt sich die Parameteridentifikation mittels dem Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der IV-Methode anwenden, das anhand eines Beispiels im Abschnitt 5.4 illustriert wird.

5.1 Geschlossene Lösung unter Berücksichtigung des Short-Memory-Prinzips

Die in der Literatur [Xue17, S. 113] bekannte geschlossenen Lösung (3.50) benötigt alle Funktionswerte des Ein- und Ausgangssignals bis zu dem Zeitpunkt t_0, ab dem das fraktionale System aus der Ruhe ausgelenkt wurde. Um eine praktische Anwendung des hergeleiteten Parameteridentifikationsverfahrens zu ermöglichen, gilt in dieser Arbeit jedoch, dass Messdaten erst ab einem Zeitpunkt t_1 mit $t_1 > t_0$ zur Verfügung stehen. Da diese Annahme der Voraussetzung der geschlossenen Lösung (3.50) widerspricht, sind diese nicht einsetzbar. Zur Berechnung der fraktionalen Ableitung von Funktionen ist für diesen Fall das SMP beschrieben worden, damit zumindest approximativ der Funktionsverlauf bestimmt werden kann. Dem SMP liegt

die Erkenntnis zugrunde, dass weiter zurückliegende Funktionswerte einen geringeren Einfluss auf aktuelle und zukünftige Funktionswerte haben (siehe Abschnitt 3.1.4). In [Den07], [BD17] ist das SMP auch auf fraktionale Systeme angewendet worden. Allerdings wird in [Den07] die Klasse der fraktionalen Systeme auf

$$ {}_{t_0}\mathrm{d}C_t^{\alpha} x(t) = f(t,x) \tag{5.1} $$

beschränkt, wodurch dieser Ansatz für die Beantwortung der Forschungsfrage zu einschränkend ist (siehe Abschnitt 2.1.3). In [BD17] wird das System ausgehend von einer Ruhelage simuliert. Nach dem Prinzip des Moving Horizon werden bei der Berechnung der Funktionswerte stets nur eine feste Anzahl zurückliegender Funktionswerte berücksichtigt. Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit keine Einschränkung bezüglich des fraktionalen Systems und des Startzeitpunkts der Simulation vorgenommen werden.

Definition 5.1 (Geschlossene Lösung für FDGLen mit dem SMP [SSH21])
Sei $t_0, t_1, t_2, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 \leq t$, $T \in \mathbb{R}$ die Abtastzeit, $L \in \mathbb{N}$ die Speicherlänge des SMPs, $t_2 = t_1 + LT$,

$$ \sum_{i=0}^{n} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_i} \tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\beta_k} u(t) \tag{5.2} $$

die FDGL mit dem exakten Eingangssignal u und dem von Rauschen additiv überlagerten Ausgangssignal $\tilde{y}$ entsprechend (3.46)*, t_0 der Zeitpunkt, vor dem das fraktionale System in Ruhe, war und t_1 der Zeitpunkt, ab dem das Eingangssignal u sowie die Messungen des Ausgangssignals $\tilde{y}$ vorliegen.*
Die geschlossene Lösung der FDGL y_{smp} unter Berücksichtigung des SMPs wird im Intervall $[t - LT, t]$ durch

$$ \begin{aligned} y_{\mathrm{smp}}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \Bigg[&\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=0}^{L} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t - lT) - \\ &\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \left(\sum_{l=1}^{L_1} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y_{\mathrm{smp}}(t - lT) + \sum_{l=L_1+1}^{L} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \tilde{y}(t - lT) \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{5.3} $$

mit

$$ L_1 = \min\left(\left\lfloor \frac{t - t_1 - LT}{T} \right\rfloor, L \right) \tag{5.4} $$

bestimmt.

In der präsentierten geschlossenen Lösung (5.3) werden die ersten L Messwerte nach dem Messbeginn t_1 verwendet, um die Berechnungsvorschrift zu initialisieren und somit den Anfangsfehler zu reduzieren [Kup19, S. 35]. Mit Hilfe dieser Messwerte wird der erste Simulationswert für t_2 berechnet. Für alle nachfolgenden Zeitpunkte werden keine weiteren Messwerte hinzugenommen, sondern die simulierten Ausgangswerte werden als aktuellere Funktionswerte in (5.3) verwendet. Dieses wird über die Hilfsgröße L_1 (5.4) sichergestellt.

5.2 Simulationsfehler bei Anwendung des Short-Memory-Prinzips

Mit (5.3) steht eine Simulation des Ausgangssignals für die IV-Methode zur Verfügung. Jedoch muss sich ein Fehler ergeben, da zum einen die Signalverläufe für $t \in [t_0, t_1)$ nicht berücksichtigt werden und zum anderen die Messung des verrauschten Ausgangssignals zur Initialisierung des SMPs für $t \in [t_1, t_2)$ verwendet wird.

Lemma 5.1 (Simulationsfehler der geschlossenen Lösung für FDGLen mit dem SMP [SSH21])

Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 5.1 gegeben und sei zusätzlich y_{smp} *das mit* (5.3) *berechnete Ausgangssignal des fraktionalen Systems* (5.2).
Der Simulationsfehler e_{smp}, *der sich aus der Differenz zwischen* (3.50) *und* (5.3) *ergibt, ist*

$$e_{\text{smp}}(t) := y(t) - y_{\text{smp}}(t) \tag{5.5}$$

$$= \lim_{T \to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=L+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t-lT) - \right.$$
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=L+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) - \sum_{l=L_1+1}^{L} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \varepsilon(t-lT) - \tag{5.6}$$
$$\left. \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=1}^{L_1} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} e(t-lT) \right]$$

mit

$$L_1 = \min\left(\lfloor \frac{t - t_1 - LT}{T} \rfloor, L \right). \tag{5.7}$$

Beweis:
Beim Bilden der Differenz von (3.50) und (5.3) wird direkt offensichtlich, dass sich alle Ausdrücke bezüglich des Eingangssignals u mit Ausnahme der Ausdrücke im Bereich $t \in [t_0, t - LT)$ gegenseitig aufheben. In diesem Bereich wird in (5.3) das Ausgangssignal y ebenfalls nicht berücksichtigt, wodurch der Anteil aus (3.50) im Simulationsfehler auftaucht. Da mit (3.50) das unverrauschte Ausgangssignal y berechnet wird, aber in (5.3) das mit Rauschen überlagerte Ausgangssignal $\tilde{y}$ zur Initialisierung des SMPs im Bereich $t \in [t_1, t_2)$ verwendet wird, taucht im Simulationsfehler das Rauschen ε für diesen Zeitbereich auf. Nach $t = t_2$ unterscheiden sich die Ausgangssignale $\tilde{y}$ und y_{smp}, wenn das System vor $t = t_1$ nicht in Ruhe war und Rauschen das Ausgangssignal überlagert. Dies führt somit auf

$$
\begin{aligned}
e_{\mathrm{smp}}(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \Bigg[& \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=\lfloor\frac{t-t_1}{T}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t-lT) - \\
& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=\lfloor\frac{t-t_1}{T}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) - \sum_{l=\lfloor\frac{t-t_2}{T}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t-t_1}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \varepsilon(t-lT) - \\
& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=1}^{\lfloor\frac{t-t_2}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=1}^{\lfloor\frac{t-t_2}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y_{\mathrm{smp}}(t-lT) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Die Summen, die das Intervall $[t-LT, t)$ beschreiben, lassen sich zusammenfassen. Durch Ausklammern aller Ausdrücke bis auf y und y_{smp} treten die beiden Ausgangssignale y und y_{smp} als Differenz nur in der inneren Summe mit dem Laufindex l auf. Das Nutzen der Definition des Simulationsfehlers (5.5) führt schließlich auf (5.6). □

Für den Zeitbereich $t \in [t_1, t_2]$ resultiert der Simulationsfehler (5.6) in

$$
\begin{aligned}
e_{\mathrm{smp}}(t_2) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \Bigg[& \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=\lfloor\frac{t_2-t_1}{T}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t_2-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t-lT)(t) - \\
& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=\lfloor\frac{t_2-t_1}{T}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t_2-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) - \sum_{l=1}^{\lfloor\frac{t_2-t_1}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \varepsilon(t-lT) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Daraus folgt, dass der initiale Simulationsfehler sich aufgrund der Vernachlässigung der Historie sowie dem Rauschen im Intervall $[t_1, t_2)$ ausbildet. Allerdings kommt es für $t > t_2$ zusätzlich zur Überlagerung des Einflusses der Historie und der Dynamik des Simulationsfehlers e_{smp}. Dies wird im nächsten Abschnitt analysiert.

5.3 Konvergenzanalyse der geschlossenen Lösung basierend auf dem Short-Memory-Prinzip

In diesem Abschnitt wird analysiert, welche Voraussetzungen das fraktionale System erfüllen muss, damit der Simulationsfehler (5.6) gegen Null konvergiert und damit das simulierte Ausgangssignal dem ungestörten Ausgangssignal des Systems entspricht. Dafür gilt die Annahme, dass die Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems bekannt sind. Im vorherigen Abschnitt wurde erläutert, dass der Simulationsfehler sich aus der Historie des fraktionalen Systems, dem Rauschen während der SMP-Initialisierung und der Dynamik des Simulationsfehlers zusammensetzt. Da sich bei Anwendung des Moving Horizon-Prinzips der Einfluss der Systemhistorie in Abhängigkeit der zusätzlich vernachlässigten Funktionswerte ändert, ist keine Aussage bezüglich der Konvergenz möglich [WCCW17]. Aus diesem Grund wird

analog zu den Funktionen überprüft, ob sich der Simulationsfehler der Berechnungsvorschrift (5.3) bei zunehmender Speicherlänge L verringert [WCCW17]. Für die Konvergenzanalyse wird angenommen, dass

(a) sich das fraktionale System vor $t = t_0$ in Ruhe befindet,
(b) zur Initialisierung der Berechnungsvorschrift (5.3) die Messdaten des Ein- und Ausgangssignals u und $\tilde{y}$ aus dem Intervall $[t_1, t_2)$ mit $t_0 \leq t_1 < t_2$ genutzt werden,
(c) ab $t = t_2$ das berechnete Ausgangssignal y_{smp} zur Verfügung steht und
(d) der Speicher mit der Länge L sämtliche Daten im Intervall $[t_1, t]$ umfasst.

Daraus folgt für die Berechnungsvorschrift (5.3)

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{smp}}(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \Bigg[\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t-lT) - \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \left(\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y_{\mathrm{smp}}(t-lT) + \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \tilde{y}(t-lT) \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Mit fortschreitender Zeit nimmt der Einfluss der Historie des Ein- und Ausgangssignals u und y sowie des Rauschens ε aufgrund der Gewichtung mit dem Binomialkoeffizienten ab. Dies wird ausgenutzt, indem diese beiden Einflüsse als ein abklingendes Eingangssignal

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) := \lim_{T\to 0} \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{T^{\beta_k}} \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u(t-lT) - \\ \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \left[\sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) - \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \varepsilon(t-lT) \right] \end{aligned} \tag{5.11}$$

für die Konvergenzanalyse interpretiert werden und die Dynamik des Simulationsfehlers als ein fraktionales System aufgefasst wird. Zur Formulierung des fraktionalen Systems des Fehlers wird die folgende Annahme getroffen.

Annahme 5.1 (Existenz Laplace-Transformierte des Hilfseingangssignals)
Es wird angenommen, dass $\tilde{U}$ eine Laplace-Transformierte des Hilfseingangssignals $\tilde{u}$ (5.11) *ist.*

Lemma 5.2 (Fehlersystem der geschlossenen Lösung mit dem SMP [SSH21])
Sei e_{smp} der Simulationsfehler aus Lemma 5.1, $\tilde{U}$ die Laplace-Transformierte des Hilfseingangssignals $\tilde{u}$ (5.11) *und $s \in \mathbb{C}$ die komplexe Frequenz.*
Unter der Annahme 5.1 ist der Simulationsfehler im Frequenzbereich

$$E(s) = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_n s^{\alpha_i}} \tilde{U}(s). \tag{5.12}$$

Beweis:
Mit dem Hilfseingangsignal (5.11) ist der resultierende Simulationsfehler

$$e_{\text{smp}}(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}} \left[\tilde{u}(t) - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} e(t - lT) \right]. \tag{5.13}$$

Von diesem Punkt aus werden die Schritte zur Herleitung der geschlossenen Lösung (3.9) rückwärts durchgeführt. Dafür wird als Erstes (5.13) mit $\sum_{i=0}^{n} a_i/T^{\alpha_i}$ multipliziert. Die linke Seite der sich ergebenden Gleichung entspricht für $l = 0$ dem Summand der auf der rechten Seite stehenden Summe. Wenn alle Ausdrücke des Simulationsfehlers e_{smp} auf die linke Seite gebracht werden, ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} e_{\text{smp}}(t - lT) = \tilde{u}(t) \tag{5.14}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_2}\mathrm{d}GL_t^{\alpha_i} e_{\text{smp}}(t) = \tilde{u}(t) \tag{5.15}$$

mit der Definition der Ableitungsvorschrift nach Grünwald-Letnikov (3.15). Unter der Annahme 5.1 führt die Anwendung von (3.41) auf (5.15) zu dem Ergebnis

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^{\alpha_i} E(s) = \tilde{U}(s). \tag{5.16}$$

Auflösen von (5.16) nach E ergibt (5.12). □

Der vorherige Beweis basiert auf der Annahme 5.1. Aufgrund des in (5.11) auftretenden Binomialkoeffizienten ist eine Laplace-Transformation des Hilfseingangssignals $\tilde{u}$ jedoch nicht direkt möglich. Für die Konvergenzanalyse wird daher eine Hilfsfunktion verwendet, die zu jedem Zeitpunkt betragsmäßig größer als das Hilfseingangssignal ist. Diese Hilfsfunktion wird im Nachfolgenden als obere Abschätzung des Hilfseingangssignals bezeichnet. Dadurch wird sicher gestellt, dass die Konvergenzanalyse restriktiver ist und somit gültig für das ursprüngliche Hilfseingangssignal $\tilde{u}$ bleibt.

Lemma 5.3 (Obere Abschätzung des Hilfseingangssignals [SSH21])
Sei $L \in \mathbb{N}$ die Speicherlänge des SMPs, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $s \in \mathbb{C}$ die komplexe Frequenz, das fraktionale System entsprechend Lemma 5.1 mit der FDGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_i} \tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\,t_1}\mathrm{D}GL_t^{\beta_k} u(t), \tag{5.17}$$

$\tilde{u}$ das Hilfseingangssignal (5.11) *und Γ_i die unvollständige Gamma-Funktion [AS65, S. 260].*

Die Laplace-Transformierte einer oberen Abschätzung von dem Hilfseingangssignal $\tilde{u}$ (5.11) *ist*

$$\tilde{U}_a(s) = \sum_{j=0}^{n+m+2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_1-t_0}{T} \rfloor} \frac{\kappa_{j,l}}{\lambda_{j,l}} e^{\frac{s}{\lambda_{j,l}}} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}}\right) + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_2-t_1}{T} \rfloor} \frac{\tilde{\kappa}_{j,l}}{\tilde{\lambda}_{j,l}} e^{\frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}\right). \quad (5.18)$$

Beweis:
In dem Beweis wird ausgenutzt, dass durch Abschätzung jedes einzelnen Summanden in (5.11) nach oben ebenfalls eine Abschätzung der gesamten Summe nach oben erreicht wird. Da alle Summanden in (5.11) die gleiche Struktur aufweisen, ist es ausreichend einen Summanden exemplarisch zu betrachten. Die obere Abschätzung wird für die α_i-te Ableitung des Ausgangssignals

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) \quad (5.19)$$

hergeleitet. Auch für die Abschätzung von (5.19) gilt, dass die Struktur der Summanden gleich ist und die Abschätzung der Summe über die einzelnen Summanden erfolgen kann.

Mit der Annahme, dass $l > \lfloor \alpha_i \rfloor$ ist, ergibt sich der ausmultiplizierte Binomialkoeffizient zu

$$\binom{\alpha_i}{l} = \frac{\alpha_i \cdot \ldots \cdot (\alpha_i - \lfloor \alpha_i \rfloor) \cdot (\alpha_i - \lfloor \alpha_i \rfloor - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_i - l + 1)}{l!}. \quad (5.20)$$

Die Faktoren in (5.20) werden in einen positiven und negativen Teil aufgetrennt. Anschließend werden die positiven und negativen Teile als Produkte zusammenfassen:

$$\binom{\alpha_i}{l} = \frac{\prod_{\mu=0}^{\lfloor \alpha_i \rfloor} (\alpha_i - \mu) \prod_{\mu=1}^{l-\lfloor \alpha_i \rfloor - 1} (-1)^{\mu} (\mu - \alpha_i + \lfloor \alpha_i \rfloor)}{l!}. \quad (5.21)$$

Aufgrund der betragsmäßigen Abschätzung kann im zweiten Produkt das Vorzeichen vernachlässigt werden und die Produkte selbst durch die Fakultät nach oben abgeschätzt werden. Dadurch ergibt sich

$$\left|\binom{\alpha_i}{l}\right| \le \left| \frac{\lceil \alpha_i \rceil! \, (l - \lfloor \alpha_i \rfloor - 1)!}{l!} \right|. \quad (5.22)$$

Die Abschätzung (5.22) wird verwendet, um (5.19) betragsmäßig abzuschätzen. Nach wie vor soll $l > \lfloor \alpha_i \rfloor$ gelten, wodurch die betragsmäßige Abschätzung zu

$$\left| \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y(t-lT) \right| \le \left| \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \lceil \alpha_i \rceil! y(t-lT) \right| \left| \frac{(l - \lfloor \alpha_i \rfloor - 1)!}{l!} \right| \quad (5.23)$$

$$= \left| \frac{a_i}{T^{\alpha_i}} \lceil \alpha_i \rceil! y(t-lT) \right| \left| \frac{1}{\prod_{\mu=l-\lfloor \alpha_i \rfloor}^{l} \mu} \right| \quad (5.24)$$

führt. Das Produkt $\prod_{\mu=l-\lfloor\alpha_i\rfloor}^{l}\mu$ wächst dem Beweis in [Spi06, S. 322] nach schneller als jedes Polynom. Folglich gilt

$$\left|\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\left(-1\right)^l\binom{\alpha_i}{l}y\left(t-lT\right)\right| \leq \left|\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\lceil\alpha_i\rceil!y\left(t-lT\right)\right|\left|\frac{1}{\prod\limits_{\mu=l-\lfloor\alpha_i\rfloor}^{l}\mu}\right| \tag{5.25}$$

$$\leq \left|\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\lceil\alpha_i\rceil!y\left(t-lT\right)\right|\left|\frac{1}{1+\lambda_{i,l}\left(t-t_1\right)}\right|, \tag{5.26}$$

wobei mittels $\lambda_{i,l}$ eine Hilfsgröße für die Abschätzung des Abklingverhaltens nach oben ist. Die anderen Größen werden in

$$c_{i,l} := \frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\lceil\alpha_i\rceil!y\left(t-lT\right) \tag{5.27}$$

zusammengefasst, wodurch $c_{i,l}$ den Anfangswerteinfluss der α_i-ten Ableitung des Ausgangssignals zum l-ten Schritt abschätzt. Damit stellt

$$\tilde{u}_{i,l}\left(t\right) = \frac{c_{i,l}}{1+\lambda_{i,l}\left(t-t_1\right)} \tag{5.28}$$

eine obere Abschätzung des l-ten Summanden von (5.19) dar.

Falls $l \leq \lfloor\alpha_i\rfloor$ ist, treten die negativen Faktoren in (5.20) nicht auf, wodurch sich die Abschätzung (5.24) zu

$$\left|\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\left(-1\right)^l\binom{\alpha_i}{l}y\left(t-lT\right)\right| \leq \left|\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\lceil\alpha_i\rceil!y\left(t-lT\right)\right|\left|\frac{1}{l!}\right| \tag{5.29}$$

ändert. Die obere Abschätzung (5.28) ist basierend auf dem Beweis in [Spi06, S. 322] in diesem Fall auch eine gültige Abschätzung.

Auf die obere Abschätzung des Summanden (5.28) wird die Definition der Laplace-Transformation [Sch99, S. 2] angewendet. Daraus resultiert

$$\tilde{U}_{i,l}\left(s\right) = \int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{c_{i,l}}{1+\lambda_{i,l}\left(t-t_1\right)}e^{-s\left(t-t_1\right)}\mathrm{d}t \tag{5.30}$$

und mit der Substitution $\tau := \frac{s}{\lambda_{i,l}}\left(1+\lambda_{i,l}\left(t-t_1\right)\right)$ folgt

$$\tilde{U}_{i,l}\left(s\right) = \frac{c_{i,l}}{\lambda_{i,l}}e^{\frac{s}{\lambda_{i,l}}}\int\limits_{\frac{s}{\lambda_{i,l}}}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{5.31}$$

wobei das Integral die unvollständige Gamma-Funktion $\Gamma_i\left(0,\frac{s}{\lambda_{i,l}}\right)$ repräsentiert [AS65, S. 260].

Der Beweis folgt für alle anderen auftretenden Summanden analog. Dabei ist zu berücksichtigen, dass das Ein- und Ausgangssignal im Intervall $[t_0, t_1)$ und das Rauschen im Intervall $[t_1, t_2)$ in (5.11) auftritt. Aufgrund der Linearitätseigenschaft der Laplace-Transformation addieren sich die einzelnen Laplace-Transformierten, sodass die obere Abschätzung des Hilfseingangssignals (5.18) resultiert. □

Damit sind die Vorarbeiten zur Untersuchung der Konvergenz des Simulationsfehlers (5.6) abgeschlossen und das Theorem kann formuliert werden.

Theorem 5.1 (Konvergenz der geschlossenen Lösung für FDGLen mit dem SMP [SSH21])

Sei E der Simulationsfehler im Frequenzbereich (5.12)

$$E(s) = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_n s^{\alpha_i}} \tilde{U}_a(s) \tag{5.32}$$

mit $\tilde{U}_a$ der oberen Abschätzung (5.18) *des Hilfseingangssignals* (5.18) *im Frequenzbereich. Der Simulationsfehler konvergiert für $t \to \infty$ gegen Null, wenn die Ableitungsordnung der FDGL $\alpha_0 < 1$ ist.*

Beweis:
Zur Analyse der Konvergenz werden die Ergebnisse der Lemmata 5.2 und 5.3 verwendet. Auf das System der Fehlergleichung (5.12) wird der Endwertsatz [Sch99, S. 88] unter Berücksichtigung der oberen Abschätzung des Hilfseingangssignals (5.18)

$$E_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) \tag{5.33}$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^{\alpha_i}} \left(\sum_{j=0}^{n+m+2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_1 - t_0}{T} \rfloor} \frac{\kappa_{j,l}}{\lambda_{j,l}} e^{\frac{s}{\lambda_{j,l}}} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}}\right) + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_2 - t_1}{T} \rfloor} \frac{\tilde{\kappa}_{j,l}}{\tilde{\lambda}_{j,l}} e^{\frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}\right) \right) \tag{5.34}$$

angewendet. Da die Ausdrücke s^{α_i} für $i = 1, \ldots, n$ aufgrund der Sortierung der Ableitungsordnungen ($\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_0$) schneller als α_0 gegen Null konvergieren, reduziert sich (5.34) zu

$$E_\infty = \sum_{j=0}^{n+m+2} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_1 - t_0}{T} \rfloor} \frac{\kappa_{j,l}}{a_0 \lambda_{j,l}} \lim_{s\to 0} s^{1-\alpha_0} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}}\right) + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t_2 - t_1}{T} \rfloor} \frac{\tilde{\kappa}_{j,l}}{a_0 \tilde{\lambda}_{j,l}} \lim_{s\to 0} s^{1-\alpha_0} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}\right). \tag{5.35}$$

Für die Konvergenz müssen nur noch die von der komplexen Frequenz s abhängige Teile

$$f_{j,l}(s) := s^{1-\alpha_0} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}}\right) \quad \text{und} \tag{5.36}$$

$$\tilde{f}_{j,l}(s) := s^{1-\alpha_0} \Gamma_i\left(0, \frac{s}{\tilde{\lambda}_{j,l}}\right) \tag{5.37}$$

untersucht werden, das im Nachfolgenden exemplarisch für $f_{j,l}$ erfolgt. Aus der Definition der unvollständigen Gamma-Funktion folgt der Grenzwert

$$\lim_{s \to 0} \Gamma_i \left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}} \right) \to \infty, \tag{5.38}$$

während für den von $(s^{1-\alpha_0})$-abhängigen Ausdruck eine Fallunterscheidung

$$\lim_{s \to 0} s^{1-\alpha_0} \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha_0 < 1 \\ = 1 & \text{für } \alpha_0 = 1 \\ \to \infty & \text{für } \alpha_0 > 1 \end{cases} \tag{5.39}$$

notwendig ist. Aus (5.38) und (5.39) folgt direkt, dass $E_\infty \to \infty$ für $\alpha_0 \geq 1$ gilt. Für $\alpha_0 < 1$ ist $f_{j,l}$ an der Stelle $s = 0$ unbestimmt. Zur Endwertbestimmung wird die Regel von de L'Hospital [AS65, S. 13] angewendet, womit

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Gamma_i \left(0, \frac{s}{\lambda_{j,l}} \right)}{\frac{1}{s^{1-\alpha_0}}} \overset{\text{L.H.}}{=} \frac{-\frac{e^{\frac{s}{\lambda_{j,l}}}}{s}}{\frac{1-\alpha_0}{s^{2-\alpha_0}}} = 0 \tag{5.40}$$

und somit $E_\infty = 0$ folgt. □

Aus dem Theorem 5.1 folgt, dass mit zunehmender Zeit beziehungsweise größer werdender Speicherlänge L der Simulationsfehler e_{smp} für fraktionale Systeme mit $\alpha_0 < 1$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, während der Simulationsfehler für die fraktionalen Systeme mit $\alpha_0 \geq 1$ divergiert. In der praktischen Anwendung ist ein Kompromiss zwischen der Größe des Simulationsfehlers und der Rechenzeit zu treffen. Die Rechenzeit erhöht sich mit zunehmender Speicherlänge L, da dadurch die Anzahl an mathematischen Operationen zur Bestimmung von $y_{\text{smp}}(t)$ ansteigt.

Mit Blick auf die Parameteridentifikation aus Abschnitt 4.3 ist anzumerken, dass von einer starken Korrelation zwischen den beiden Signalen auszugehen ist, da der Simulationsfehler e_{smp} als Differenz zwischen dem mit (5.3) berechneten Ausgangssignal y_{smp} und dem ungestörten Ausgangssignal y des fraktionalen Systems definiert ist. Folglich erfüllt das Ausgangssignal y_{smp} die im Abschnitt 4.3.2 formulierten Bedingungen und kann als Hilfsvariable für die Parameteridentifikation eingesetzt werden.

Beispiel 5.1:

In diesem Beispiel wird die Konvergenz des Simulationsfehlers e_{smp} betrachtet. Als Beispielsystem wird das fraktionale Modell

$$2 \, {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{1,3} \tilde{y}(t) + {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{\alpha_0} \tilde{y}(t) = {}_{t_0}\mathrm{d}RL_t^{0,3} u(t) \tag{5.41}$$

verwendet. Im ersten Fall wird $\alpha_0 = 0{,}4$ gewählt, sodass die Bedingung für die Konvergenz in dem Theorem 5.1 erfüllt wird. Im zweiten Fall wird die Bedingung für die Konvergenz mit $\alpha_0 = 1$ verletzt. Als Anregungssignal dient ein Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer

Amplitude von 1 *und einem Sprungabstand von* $10\,\mathrm{s}$*, das insgesamt* $T_{ges} = 100\,000\,\mathrm{s}$ *lang ist. Um die Simulationsfehler zu bestimmen, wird das Ausgangssignal* y *nach* (3.50) *für das in Ruhe befindliche System und das Ausgangssignal* y_{smp} *nach* (5.10) *für das nicht in Ruhe befindliche System mit einer Abtastzeit von* $T = 1\,\mathrm{s}$ *berechnet. Die Berechnung des Ausgangssignals* y_{smp} *beginnt ab* $t_1 = 50\,\mathrm{s}$*. Für die Initialisierung der Berechnungsvorschrift* (5.10) *wird das Ein- und Ausgangssignal im Intervall* $[50\,\mathrm{s}, 500\,\mathrm{s}]$ *verwendet. Zudem wird zur Berechnung mit* (5.10) *ein verrauschtes Ausgangssignal* $\tilde{y}$ *mit einem Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) von* $38{,}3\,\mathrm{dB}$ *anstelle des Ausgangssignals* y *eingesetzt.*

In der Abbildung 5.1 ist der Simulationsfehler (5.5) *dargestellt, wobei sich der obere Verlauf für* $\alpha_0 = 0{,}4$ *und der untere für* $\alpha_0 = 1$ *ergibt. Entsprechend dem Theorem 5.1 konvergiert, der nach* (5.6) *berechnete Simulationsfehler für den Fall* $\alpha_0 = 0{,}4 < 1$ *für* $t \to \infty$ *gegen Null, wohingegen für* $\alpha_0 = 1$ *der Fehler mit zunehmender Zeit anwächst. Zu dem Verlauf, der sich für* $\alpha_0 = 0{,}4$ *ergibt, ist anzumerken, dass der Fehler des simulierten Ausgangssignals zum Zeitpunkt* $t = 500\,\mathrm{s}$ *Null sein muss, da dieser noch dem letzten Messwert des Ausgangssignals entspricht. Anschließend steigt der Simulationsfehler an. Das liegt daran, dass die anfänglichen Abweichungen durch den Binomialkoeffizient stärker gewichtet werden. Der Einfluss der Historie verringert sich mit zunehmender Zeit, sodass der Fehler für* $\alpha_0 < 1$ *abnimmt und gegen Null konvergiert.*

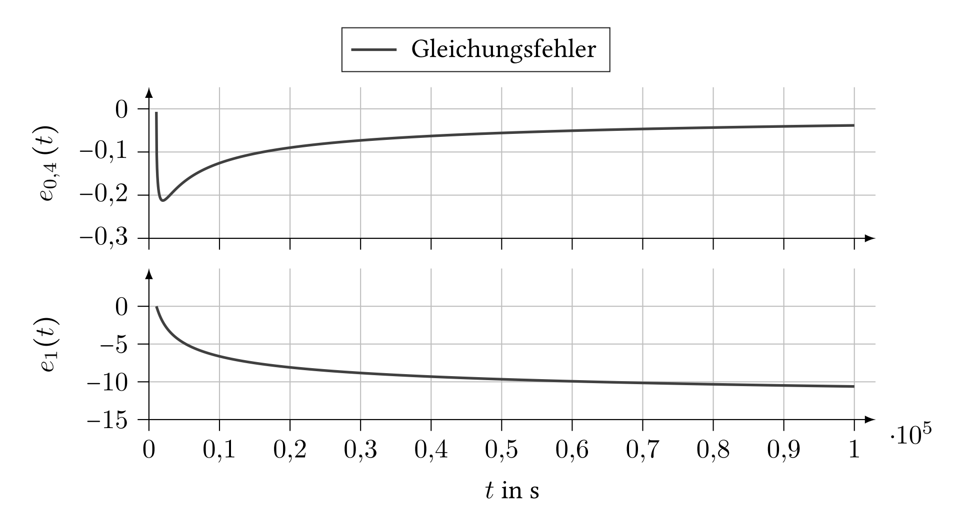


Abbildung 5.1: Verlauf der Simulationsfehler für das System (5.41) mit $\alpha_0 = 0{,}4$ (oben), sodass die Bedingung im Theorem 5.1 erfüllt ist, und mit $\alpha_0 = 1$ (unten), sodass die Bedingung im Theorem 5.1 nicht erfüllt ist

5.4 Beispiel zur Illustrierung der Methode der Hilfsvariablen für fraktionale Systeme

Im Abschnitt 4.3 wird für eine konsistente Parameteridentifikation mittels dem Modulationsfunktionsverfahren vorgeschlagen, die IV-Methode anstelle der LS-Methode einzusetzen. Allerdings blieb die Frage offen, wie die notwendige Schätzung des ungestörten Ausgangssignals y_s (4.84) bestimmt werden kann. Mit der geschlossenen Lösung (5.3) steht eine Simulationsvorschrift für fraktionale Systeme, die sich nicht in Ruhe befinden, zur Verfügung, wodurch (5.3) diesen letzten, offenen Punkt schließt. In diesem Abschnitt wird die Parameteridentifikation eines fraktionalen Systems mit dem Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der IV-Methode anhand eines Beispiels illustriert.

Beispiel 5.2:

In diesem Beispiel wird für die Parameteridentifikation im Modulationsfunktionsverfahren einerseits die IV-Methode aus Abschnitt 4.3 und andererseits die LS-Methode eingesetzt. Anhand der Identifikationsergebnisse wird gezeigt, dass im Gegensatz zur LS-Methode die IV-Methode die Parameter erwartungstreu bestimmt. Neben den verrauschten Ausgangssignal wird zudem die Parameteridentifikation für ein zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindliches System demonstriert. Als Beispielsystem wird das fraktionale System

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,8} y(t) + a_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,5} y(t) + a_0 y(t) = b_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,5} u(t) + b_0 \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{0,1} u(t) \quad (5.42) $$

mit den zu identifizierenden Parametern $a_1 = 2$, $a_0 = 3$, $b_1 = 1$ und $b_0 = 4$ betrachtet. Das System befindet sich vor dem Beginn der Anregung $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ in Ruhe. Die Parameteridentifikation wird zum Zeitpunkt $t_1 = 15\,\mathrm{s}$ (Abbildung 4.4 (gepunktete Linie)) mit einem Identifikationshorizont von $T_i = 20\,\mathrm{s}$ gestartet. Die gesamte Simulationsdauer beträgt $T_{ges} = 170\,\mathrm{s}$ und die Abtastzeit wird gemäß Lemma 4.7 zu $T = 0{,}01\,\mathrm{s}$ gewählt. Als Anregungssignal u wird Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer Amplitude von 1 und einem Sprungabstand von $1\,\mathrm{s}$ verwendet. Das Anregungssignal u ist in der Abbildung 5.2 (oben) und das zugehörige ungestörte Ausgangssignal y in der Abbildung 5.2 (unten) als gestrichelte Linie dargestellt. Um das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$ zu erzeugen, wird das Ausgangssignal y mit mittelwertfreies, weißes Rauschen ε entsprechend Annahme 3.3 überlagert, das zu einem SNR von $38{,}4\,\mathrm{dB}$ führt. Das verrauschte Ausgangssignal ist ebenfalls in der Abbildung 4.4 als durchgezogene Linie abgebildet.

Als Modulationsfunktion γ wird die gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *eingesetzt. Durch die Wahl der Parameter der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion zu $s = 10$ und $o = 5$ besitzt die gewählte Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P1)$, da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ und $s \geq o + 2$ gilt. Da zudem $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft $(P4)$.*

Die Integrale der Identifikationsgleichung (4.3) *werden mit der Trapezregel [Zei13, S. 899] approximiert. Die Intervallgröße wird dafür gleich der Abtastzeit T gewählt. Die unabhängigen Gleichungen werden entsprechend Lemma 4.3 aus dem Verschieben des Integrationsintervalls erzeugt. Das erste Intervall ist $[15\,\mathrm{s}, 35\,\mathrm{s}]$ basierend auf dem gewählten Startzeitpunkt t_1 und dem*

Identifikationshorizont T_i. *Für die weiteren Gleichungen wird das Intervall jeweils um* $T_\Delta = 2\,\mathrm{s}$ *verschoben. Dadurch ergibt sich das zweite Intervall* $[17\,\mathrm{s}, 37\,\mathrm{s}]$ *für die Identifikationsgleichung. Die Identifikationsgleichungen werden in einem Gleichungssystem* (3.59) *zusammengefasst, das für die Parameteridentifikation einerseits mit der LS-Methode und andererseits mittels der IV-Methode jeweils in Blockverarbeitung* (3.60) *beziehungsweise* (4.91) *gelöst wird.*

Die Identifikationsergebnisse sind in der Abbildung 5.3 dargestellt. Darin sind die durch die LS-Methode ermittelten Parameter als gepunktete Linie und die durch die IV-Methode bestimmten Parametern als durchgezogene Linie dargestellt. Die grau gestrichelte Linie in der Abbildung entspricht den vorgegebenen Parametern. Bei den Identifikationsergebnissen fällt auf, dass die ersten vier Parameter für beide Methoden identisch sind. Dies liegt darin, dass für die IV-Methode zur Simulation des Ausgangssignals, die mit der geschlossenen Lösung (5.3) *berechnet wird, Schätzwerte der Parameter benötigt werden. Für die Bestimmung dieser Schätzwerte wird entsprechend [IM11, S. 303] die LS-Methode eingesetzt wird. Weiterhin zeigt das Beispiel, dass selbst bei zunehmender Anzahl an Identifikationsgleichungen die mittels der LS-Methode bestimmten Parameter einen Fehler gegenüber den vorgegebenen Parameter aufweisen. Dahingegen konvergieren die Parameter, die mit Hilfe der IV-Methode bestimmt werden, trotz verrauschten Ausgangssignal entsprechend dem Theorem 4.1 gegen die Referenzparameter.*

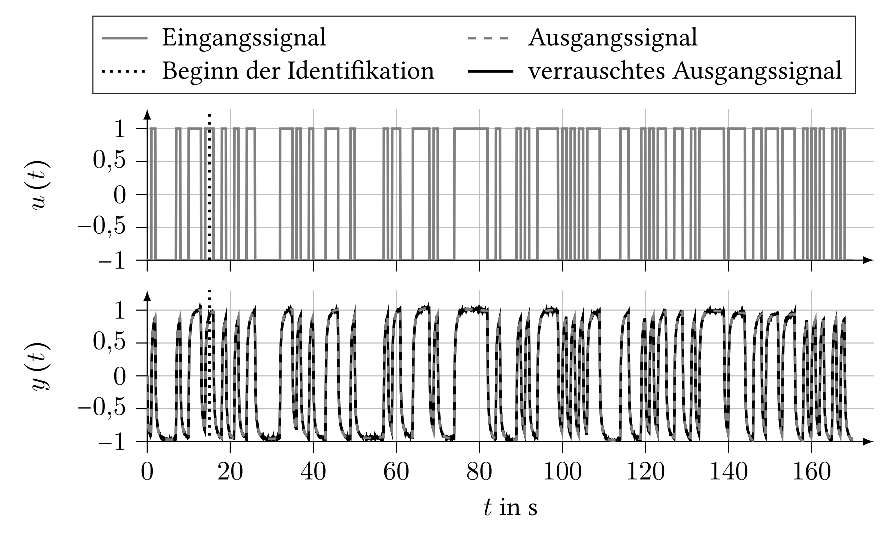


Abbildung 5.2: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und das resultierende und verrauschte Ausgangssignal (unten) für die Parameteridentifikation fraktionaler Systeme mit der IV-Methode

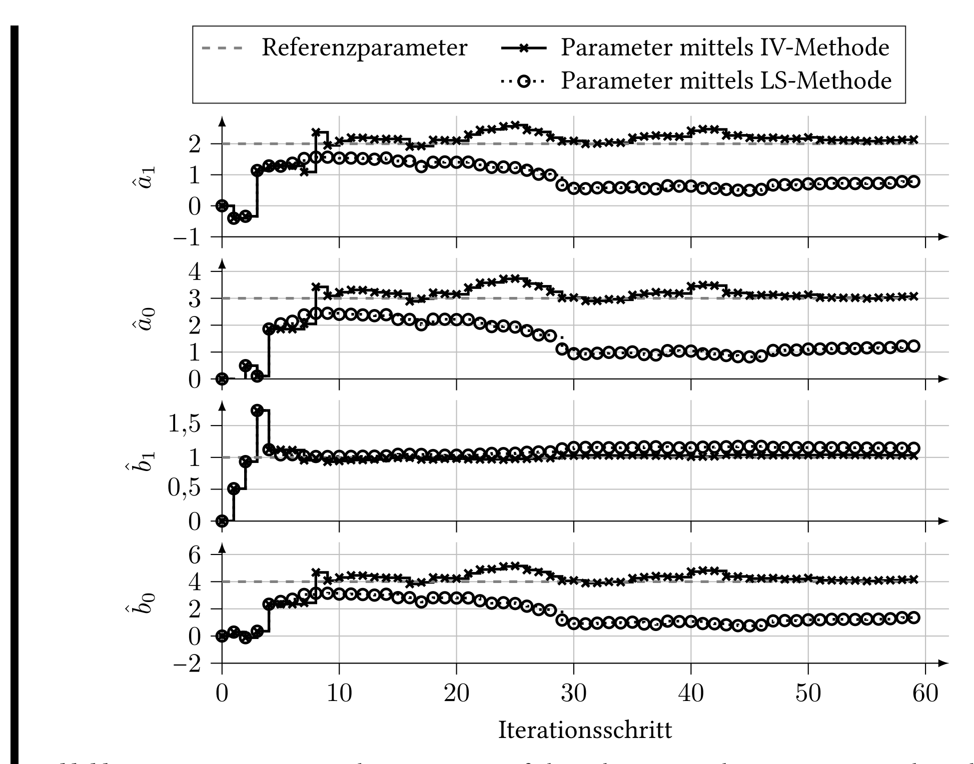


Abbildung 5.3: Iterative Parameterbestimmung eines fraktionalen Systems, dessen Ausgangssignal nur als verrauschte Größe vorliegt, mit der IV-Methode und mit der LS-Methode

5.5 Zusammenfassung und Diskussion des Short-Memory-Prinzips für fraktionale Systeme

Im Abschnitt 4.3 ist eine Parameteridentifikation für nicht in Ruhe befindliche fraktionale Systeme mit verrauschten Messungen des Ausgangssignals präsentiert worden. Dafür wird eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals eines nicht in Ruhe befindlichen Systems benötigt. In diesem Abschnitt wird dafür eine geschlossene Lösung basierend auf dem SMP (siehe Abschnitt 3.1.4) in der Definition 5.1 präsentiert. Allerdings kommt es bei Anwendung dieser geschlossenen Lösung zur Bestimmung des Ausgangssignals eines fraktionalen Systems zu einem Simulationsfehler, der die Differenz zwischen dem ungestörten Ausgangssignal des fraktionalen Systems und der geschlossenen Lösung basierend auf dem SMP angibt (siehe Lemma 5.1). Dieser Simulationsfehler resultiert, da ein Teil der Systemhistorie vernachlässigt wird und die geschlossene Lösung mittels dem Ausgangssignal des Systems, das mit Rauschen überlagert ist, initialisiert wird.

Die Konvergenz des Simulationsfehlers wird in Analogie zum SMP für Funktionen für einen mit der Zeit zunehmenden Speicher untersucht (siehe Abschnitt 5.3). Die nicht berücksichtigte Historie des Ein- und Ausgangssignals u und y sowie das Rauschen ε wirkt für die Konvergenzanalyse wie ein zeitlich abnehmendes Eingangssignal. Für eine obere Abschätzung dieses Eingangssignals wird gezeigt, dass der Simulationsfehler für Systeme mit $\alpha_0 < 1$ gegen Null konvergiert (siehe Theorem 5.1). Anhand des Beispiels 5.1 ist zu erkennen, dass die Konvergenz sehr langsam erfolgt, der maximale Simulationsfehler jedoch betragsmäßig kleiner als $0{,}3$ ist. Dieser geringe Simulationsfehler lässt bezogen auf das Parameteridentifikationsverfahren im Abschnitt 4.3 den Schluss zu, dass eine starke Korrelation zwischen dem Ausgangssignal des fraktionalen Systems y und der Schätzung y_s besteht. Unter Berücksichtigung, dass das Ausgangssignal $\tilde{y}$ zur Initialisierung der Berechnungsvorschrift (5.3) mit Rauschen überlagert war, ist die Annahme, dass die Schätzung des Ausgangssignal y_s unkorreliert zum Rauschen ε ist, valide. Damit kann die Berechnungsvorschrift (5.3) zum Aufstellen der Hilfsvariablen (4.84) in der IV-Methode eingesetzt werden und schließt somit den letzten, offenen Punkt für das im Abschnitt 4.3 präsentierte Parameteridentifikationsverfahren. Dies Verfahren kombiniert das Modulationsfunktionsverfahren mit der IV-Methode und ermöglicht im Gegensatz zur Kombination mit der LS-Methode anstelle der IV-Methode eine erwartungstreue Parameteridentifikation trotz eines verrauschten Ausgangssignals (Abschnitt 5.4).

6 Verfahren zur Ableitungsordnungs-identifikation für fraktionale Systeme

Das im Kapitel 4 hergeleitete Verfahren basiert auf der Annahme, dass die Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems bekannt sind. In diesem Kapitel wird diese Annahme fallen gelassen und Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation und deren Kombination mit der Parameteridentifikation nach Abschnitt 3.3.2 und 4.3 zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage hergeleitet. Die im Abschnitt 2.3 formulierten Anforderungen, dass das fraktionale System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe sein muss und dass das Ausgangssignal als verrauschte Messung vorliegt, bleiben unverändert bestehen. Im Abschnitt 6.1 wird bei der Herleitung eines Ableitungsordnungsidentifikationsverfahren zunächst der Fokus auf den Einfluss durch die Systemhistorie vergleichbar zum Abschnitt 4.1 gelegt und für die Herleitung der Verfahren von unverrauschten Ausgangssignalen ausgegangen. Der Einfluss des Rauschens auf die Ableitungsordnungsidentifikation wird anschließend analysiert. Im Abschnitt 6.2 wird basierend auf den Ergebnissen der Rauscheinflussuntersuchung zwei optimierungsbasierte Ansätze für die Ableitungsordnungsidentifikation hergeleitet.

6.1 Ableitungsordnungsidentifikation als Nullstellenproblem

Im Abschnitt 6.1.1 wird ausgehend von der Identifikationsgleichung (4.3) das Problem der Ableitungsordnungsidentifikation in ein mehrdimensionales Nullstellenproblem überführt. Im Abschnitt 6.1.2 wird das Newton-Verfahren zum Lösen des Nullstellenproblems eingesetzt und die Konvergenz des Newton-Verfahrens für das formulierte Problem analysiert. Bei der Konvergenzanalyse wird die Parameterabhängigkeit der Identifikationsgleichung berücksichtigt, auf die detailliert im Abschnitt 6.1.3 eingegangen wird. Im Gegensatz zu der numerischen Bestimmung der Nullstellen wird im Abschnitt 6.1.4 die Identifikationsgleichung aus Abschnitt 6.1.1 durch eine kubische Spline-Funktion approximiert. Die Nullstelle der Spline-Funktion lässt sich über die Cardanische Formel analytisch bestimmt. Der Abschnitt 6.1.5 zur Untersuchung des Rauscheinflusses auf das Nullstellenproblem schließt den Abschnitt 6.1 ab.

6.1.1 Formulierung des Nullstellenproblems

Die Idee hinter dem nachfolgend erläuterten Ansatz ist, dass die Identifikationsgleichung (4.3) als eine Funktion

$$f(\boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=0}^{n} a_i(\boldsymbol{\theta}) \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_2}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} b_k(\boldsymbol{\theta}) \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_2}^{\beta_k}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

aufgefasst werden kann, die abhängig von den Ableitungsordnungen ist. Ebenfalls werden die Parameter als Ableitungsordnung abhängige Größen interpretiert, sodass die Funktion (6.1) einzig von den Ableitungsordnungen abhängt. Ausgehend von den Ergebnissen im Abschnitt 3.3 und im Kapitel 4 lässt sich die Annahme dadurch rechtfertigen, dass eine Variation der Ableitungsordnungen auch den Messvektor (3.57) und die Messmatrix (3.58) ändern. Dies hat zur Folge, dass sich eine abweichende Lösung für das Gleichungssystem (3.57) der Parameteridentifikation ergibt. Diese abweichende Lösung wird im Folgenden als Ableitungsordnung abhängige Parameterschätzung

$$\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\hat{a}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}),\ \ldots,\ \hat{a}_0(\boldsymbol{\theta}),\ \ldots,\ \hat{b}_m(\boldsymbol{\theta}),\ \ldots,\ \hat{b}_0(\boldsymbol{\theta})\right]^\mathsf{T} \tag{6.2}$$

bezeichnet. In

$$\boldsymbol{\theta} := \left[\alpha_n,\ \ldots,\ \alpha_0,\ \beta_m,\ \ldots,\ \beta_0\right]^\mathsf{T} \tag{6.3}$$

werden alle Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems zusammengefasst, wobei die identifizierten Ableitungsordnungen durch

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} := \left[\hat{\alpha}_n,\ \ldots,\ \hat{\alpha}_0,\ \beta_m,\ \ldots,\ \hat{\beta}_0\right]^\mathsf{T} \tag{6.4}$$

repräsentiert werden. Weiterhin wird für (6.1) angenommen, dass die gewählte Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt. Dadurch wird der Einfluss der Systemhistorie eliminiert (siehe Abschnitt 4.1). Wenn in (6.1) die dem System zugrundeliegenden Ableitungsordnungen $\boldsymbol{\theta}$ und Parameter a_i sowie b_k eingesetzt werden, muss $f(\boldsymbol{\theta}) = 0$ gelten. Damit reduziert sich die Identifikation der Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems zu einer Nullstellensuche von (6.1).

Beispiel 6.1:

Dass sich die Ableitungsordnungsidentifikation durch die Formulierung von (6.1) *auf ein Nullstellensuchproblem reduziert, wird in diesem Beispiel veranschaulicht. Die geschilderte Überlegung wird anhand dem fraktionalen System*

$${}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_1} y(t) + 10y(t) = u(t) \tag{6.5}$$

mit der Ableitungsordnung $\alpha_1 = 0{,}5$ demonstriert. Der in Abbildung 6.1 dargestellte Verlauf ergibt sich durch die Evaluierung der Funktion (6.1) *im Bereich $\hat{\alpha}_1 \in [0, 1]$ mit einer Schrittweite von $\Delta_\alpha = 0{,}01$, wenn eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit $s = 10$ und $o = 5$ eingesetzt wird. Bei der Ableitungsordnung $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 = 0{,}5$ nimmt die Funktion in Übereinstimmung mit den zuvor formulierten Überlegungen den Wert Null an. Allerdings*

geht ebenfalls aus der Abbildung 6.1 hervor, dass die Funktion (6.1) *bei* $\hat{\alpha}_1 = 0{,}97$ *eine zweite Nullstelle besitzt. Dies bedeutet, dass eine Nullstellensuche keine eindeutige Lösung für die Bestimmung der Ableitungsordnung liefert. Daher muss für die praktische Anwendung durch einen Validierungsschritt sicher gestellt werden, dass die gefundenen Nullstellen auch den Ableitungsordnungen* $\boldsymbol{\theta}$ *des fraktionalen Systems entspricht.*

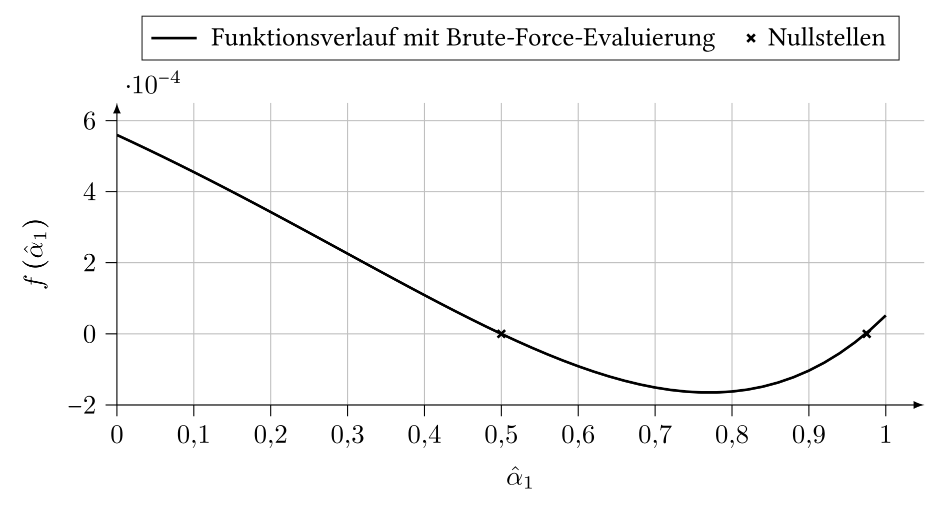


Abbildung 6.1: Illustration des Funktionsverlaufs (6.1) des einfachen Beispielsystems (6.5) bei einer Auswertung an einer Vielzahl an Funktionsstellen im Bereich $\hat{\alpha}_1 \in [0, 1]$

6.1.2 Lösungsansatz und Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens bei rauschfreien Ausgangssignal

In der vorliegenden Arbeit wird zum Lösen des Nullstellenproblems (6.1) das Newton-Verfahren [AGLR19, S. 209 ff.] angewendet. Da es sich im Allgemeinen um ein mehrdimensionales Problem handelt, müssen $N = n + m + 2$ unabhängige Gleichungen von (6.1) bestimmt werden. Dies kann durch eine Verschiebung des Identifikationshorizonts um ein Zeitintervall T_Δ erfolgen, wie es bereits für die Parameteridentifikation im Abschnitt 4.1.1 beschrieben wurde. Dadurch ergibt sich für die einzelnen Gleichungen

$$f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t)\, \mathrm{d}t \tag{6.6}$$

mit $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$ und $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$, wobei $T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ die Verschiebung des Zeitintervalls und $T_i \in \mathbb{R}_{>0}$ den Identifikationshorizont des Modulationsfunktionsverfahrens ist. Die einzelnen Gleichungen (6.6) lassen sich zu einem Vektor

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[f_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, f_N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top \tag{6.7}$$

zusammenfassen und somit als mehrdimensionale Funktion interpretieren. Die iterative Vorschrift des Newton-Verfahrens [AGLR19, S. 209 ff.] ergibt sich für (6.7) mit (6.6) zu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{q+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_q - \boldsymbol{J}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) \tag{6.8}$$

mit der vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{f}$ (6.7) und den einzelnen Funktionen f_h (6.6), der Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{J}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \frac{\partial f_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \frac{\partial f_N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

und dem Iterationsschritt $q \in \mathbb{N}_0$.

Für die Evaluierung von (6.7) und (6.9) werden die von den Ableitungsordnungen abhängigen Parameter benötigt. In diesem Abschnitt gilt die Annahme, dass die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ abhängig von den Ableitungsordnungen des aktuellen Iterationsschritts $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ bekannt sind. Da allgemein die Parameter bei der praktischen Anwendung nicht bekannt sind, erfolgt eine Kombination des vorgestellten Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation mit dem Parameteridentifikationsverfahrens aus Abschnitt 4.1 im Abschnitt 6.1.3. Weiterhin ist anzumerken, dass Startwerte für die Ableitungsordnungen vorgegeben werden müssen. Da jedoch die Identifikationsgleichung (6.1) mehrere Nullstellen (siehe Abbildung 6.1) besitzen kann, müssen die Startwerte in der Nähe der zu den Ableitungsordnungen korrespondierenden Nullstellen gewählt werden. Andernfalls kann das Newton-Verfahren gegen eine Nullstelle konvergieren, die nicht die Ableitungsordnungen repräsentiert. In Bezug auf eine praktische Anwendung sind dadurch falsche Rückschlüsse auf das System möglich.

Nachfolgend wird in diesem Abschnitt die Konvergenz des Newton-Verfahrens für die aus der Identifikationsgleichung resultierenden Funktion (6.7) untersucht. Dafür wird sowohl die erste als auch die zweite partielle Ableitung dieser Funktion benötigt, die vor der Konvergenzanalyse bestimmt werden.

Erste und zweite partielle Ableitung der Funktion des Nullstellenproblems

Zum Aufstellen der Jacobi-Matrix (6.9) ist die erste partielle Ableitung der Funktion (6.6) notwendig. Bei der Berechnung ist zu berücksichtigen, dass die Parameter $\hat{a}_i$ und $\hat{b}_k$ entsprechend (6.2) als von den Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ abhängig angenommen werden. Außerdem wird in diesem Zusammenhang auch die zweite partielle Ableitung der Funktion (6.6) bestimmt, da diese im anschließenden Konvergenzbeweis benötigt wird.

Lemma 6.1 (Erste partielle Ableitung der Funktion des Nullstellenproblems [SKH20])
Sei

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_n} y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t), \tag{6.10} $$

die FDGL, $N = n + m + 2$, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}$, $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{J} := \{j \in \mathbb{N} | j \leq N\}$, $j \in \mathcal{J}$, $t_0, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $t_0 < t_1$, $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$, $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$, γ *eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 mit der Eigenschaft* $(P4)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\hat{\alpha}_n, \ldots, \hat{\beta}_0\right]^\top$ *ein Vektor, der die identifizierten Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems zusammenfasst, und* f_h *eine unabhängige Funktion des Nullstellenproblems*

$$ f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t) \, \mathrm{d}t, \tag{6.11} $$

entsprechend (6.6). *Ferner beschreibt* $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *das* j*-te Element des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, *wobei die Indizierung bei* 1 *beginnt.*
Die partielle Ableitung der Funktion f_h *bezogen auf* $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *ist*

$$ \begin{aligned} \frac{\partial f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t - \\ \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t) \, \mathrm{d}t + \Psi(j) \end{aligned} \tag{6.12} $$

mit

$$ \Psi(j) = \begin{cases} \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, \dfrac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & j \leq n+1 \\ -\hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, \dfrac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & \textit{sonst} \end{cases}, \tag{6.13} $$

wobei die erste partielle Ableitung des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov mit (3.37) *gegeben ist.*

Beweis:
Die partielle Ableitung der Funktion f_h (6.6) folgt direkt bei Anwendung der Produktregel, da sowohl die Parameter als auch die Ableitungen der Modulationsfunktion von den Ableitungsordnungen abhängen. Da sich der Vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sowohl aus den Ableitungsordnungen des Ausgangssignals als auch des Eingangssignals zusammensetzt, ist die Fallunterscheidung (6.13) notwendig. Während sich die erste partielle Ableitung des rechtsseitigen Ableitungsoperators

nach Grünwald-Letnikov mit (3.37) explizit berechnen lässt, ist dieses für die partiellen Ableitungen der Parameter nicht möglich. □

Zum Lemma 6.1 ist anzumerken, dass die partiellen Ableitung der Parameter $\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ bei der Kombination der Ableitungsordnungsidentifikation mit der Parameteridentifikation im Abschnitt 6.1.3 betrachtet werden.

Lemma 6.2 (Zweite partielle Ableitung der Funktion des Nullstellenproblems [SKH20])

Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.1 gegeben und sei zusätzlich $\mathcal{K} := \{\kappa \in \mathbb{N} | \kappa \leq N\}$ *und* $\kappa \in \mathcal{K}$.
Die zweite partielle Ableitung der Funktion f_h *bezogen auf* $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ *und* $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ *ist*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t)\, \mathrm{d}t - \\ \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2 \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t)\, \mathrm{d}t + \\ \Psi(j,\kappa) + \Psi(\kappa,j) + \Omega(j,\kappa)\end{aligned} \tag{6.14}$$

mit

$$\Psi(j,\kappa) = \begin{cases} \frac{\partial \hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j} \mathrm{d}t & j \leq n+1 \\ -\frac{\partial \hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j} \mathrm{d}t & \textit{sonst} \end{cases} \tag{6.15}$$

und

$$\Omega(j,\kappa) = \begin{cases} \hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \frac{\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2} \mathrm{d}t & j \leq n+1 \textit{ und } j = \kappa \\ -\hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \frac{\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2} \mathrm{d}t & j > n+1 \textit{ und } j = \kappa \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}, \tag{6.16}$$

wobei die erste und zweite partielle Ableitung des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov mit (3.37) *und* (3.38) *gegeben sind.*

Beweis:
Die zweite partielle Ableitung folgt direkt bei Anwendung der Produktregel auf (6.12) mit der Hilfsgröße (6.13), da die Parameter implizit von den Ableitungsordnungen abhängen. Die erste partielle Ableitung des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov (3.37) ist im Lemma 3.5 und die zweite partielle Ableitung (3.38) im Lemma 3.6 gegeben. □

Die Parameter sind stets abhängig von allen Ableitungsordnungen, während die Ableitungsoperatoren nach Grünwald-Letnikov nur von einer Ableitungsordnung abhängen. Daher muss der Parameter in (6.15) ebenfalls nach der Ableitungsordnung $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ beziehungsweise $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ differenziert werden, auch wenn $j \neq \kappa$ gilt, wohingegen (6.16) in dem Fall $j \neq \kappa$ zu Null wird.

Konvergenzanalyse

Mit den partiellen Ableitungen der Funktion (6.1) im Lemma 6.1 und 6.2 lässt sich die Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation untersuchen. Zu den beiden Lemmata werden zusätzlich die beiden Annahmen 6.1 und 6.2 getroffen.

Annahme 6.1 (Beschränktheit der Modulationsfunktion und deren Ableitungen für die Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens)
Für die Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens für das formulierte Nullstellensuchproblem (6.6) *wird angenommen, dass*

(a) *die Modulationsfunktion* γ,
(b) *die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion* ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma\left(t\right)$ *und* ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma\left(t\right)$,
(c) *die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *und* $\partial\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *sowie*
(d) *die zweite partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2$ *und* $\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2$

beschränkt sind.

Annahme 6.2 (Beschränktheit der partiellen Ableitungen der Parameter für die Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens)
Für die Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens für das formulierte Nullstellensuchproblem (6.6) *wird angenommen, dass*

(a) *die erste partielle Ableitung der Parameter* $\partial\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *und* $\partial\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *sowie*
(b) *die zweite partielle Ableitung der Parameter* $\partial^2\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ *und* $\partial^2\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$

beschränkt sind.

Basierend auf den Lemmata 6.1 sowie 6.2 und den Annahmen 6.1 und 6.2 erfolgt die Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens (6.8) für die Ableitungsordnungsidentifikation.

Theorem 6.1 (Konvergenz der iterativen Vorschrift zur Lösung des Nullstellenproblems [SKH20])
Sei die iterative Vorschrift (6.8) *des Newton-Verfahrens für die Funktion* $\boldsymbol{f}$ (6.7) *eines fraktionalen Systems mit der Jacobi-Matrix* (6.9) *gegeben, sei* γ *eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft* $(P4)$ *und* $N = n + m + 2$.
Die iterative Vorschrift (6.8) *des Newton-Verfahrens konvergiert für die Funktion* $\boldsymbol{f}$ (6.7), *wenn die Annahmen 6.1 und 6.2 gültig sind.*

Beweis:
Nach [Kel95, S. 67 ff.] muss für die lokale Konvergenz der iterativen Vorschrift des Newton-Verfahrens gezeigt werden, dass die zur Funktion (6.7) zugehörige Jacobi-Matrix (6.9) Lipschitz stetig

$$\left\|\boldsymbol{J}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \boldsymbol{J}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\right\| \leq L \left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right\| \tag{6.17}$$

mit der Lipschitz-Konstanten L in einer geschlossenen Untermenge Ξ ist. Die geschlossene Untermenge Ξ muss die Ableitungsordnungen $\boldsymbol{\theta}$ des fraktionalen Systems enthalten. Im ersten Schritt wird die Matrix-Norm durch eine Vektornorm ausgedrückt. Wenn die 1-Norm auf die linke Seite von (6.17) angewendet wird, folgt

$$\left\|\left(\boldsymbol{J}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \boldsymbol{J}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\right)\boldsymbol{\varphi}\right\|_1 = \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \frac{\partial f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|\left|\boldsymbol{\varphi}\right| \tag{6.18}$$

mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^N$. Wenn zusätzlich $f_h \in \mathcal{C}^2\ \forall h \in \{1, 2, \ldots, N\}$ gilt, ist

$$\left|\frac{\partial f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \frac{\partial f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| \leq \left|\frac{\partial^2 f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2}\right|\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right\| \tag{6.19}$$

eine gültige Abschätzung [Kel95, S. 67 ff.]. Aus (6.19) wird offensichtlich, dass das iterative Verfahren lokal konvergiert, wenn die zweite partielle Ableitung des Nullstellenproblems existiert und für die Untermenge Ξ beschränkt ist. Unter der Annahme, dass die erste und zweite partielle Ableitung des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov (3.37) und (3.38) existiert, wird die Beschränktheit untersucht. Dafür wird (6.14) mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa}\right| = &\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\partial^2 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa}\right|\sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}}\left|y(t)\right|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}}\left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)\right|^2\mathrm{d}t}+\\&\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{\partial^2 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa}\right|\sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}}\left|u(t)\right|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}}\left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)\right|^2\mathrm{d}t}+\\&\left|\Psi(j,\kappa)\right| + \left|\Psi(\kappa,j)\right| + \left|\Omega(j,\kappa)\right|\end{aligned} \tag{6.20}$$

mit

$$|\Psi(j,\kappa)| = \begin{cases} \left|\frac{\partial \hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\{\boldsymbol{\theta}\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & j \leq n+1 \\ \left|\frac{\partial \hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\{\boldsymbol{\theta}\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.21}$$

und

$$|\Omega(j,\kappa)| = \begin{cases} \left|\hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |y(t)|^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2}\right|^2 \mathrm{d}t} & j \leq n+1 \text{ und } j = \kappa \\ \left|\hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2}\right|^2 \mathrm{d}t} & j > n+1 \text{ und } j = \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.22}$$

betragsmäßig nach oben abgeschätzt. Aus (6.20) – (6.22) können direkt die Bedingungen abgeleitet werden, die für eine lokale Konvergenz des iterativen Verfahrens notwendig sind. Die zweite partielle Ableitung des Nullstellenproblems ist genau dann beschränkt, wenn

(a) das Eingangssignal u,

(b) das Ausgangssignal y,

(c) die Parameter $\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$,

(d) die erste partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$,

(e) die zweite partielle Ableitung der Parameter $\partial^2 \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ und $\partial^2 \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$,

(f) die Modulationsfunktion γ,

(g) die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)$ und ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)$,

(h) die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ sowie

(i) die zweite partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2$ und $\partial^2\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2$

beschränkt sind.

Die Annahme 3.4, dass das Ein- und Ausgangssignal stets begrenzt sind, stellt sicher, dass die Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind. Aus dieser folgt auch, dass alle Parameter beschränkt sein müssen und somit die Bedingung (c) erfüllt wird. Ansonsten ist die Unbeschränktheit des Ausgangssignals trotz eines beschränkten Eingangssignal nicht gewährleistet [Lun20, S. 429 ff.]. Wenn die Annahmen 6.1 und 6.2, die die übrigen Bedingungen (d) – (i) abdecken, gültig sind, konvergiert das Newton-Verfahren für das Nullstellenproblem (6.1). □

Die Annahme 6.1 sichert die Erfüllung der Bedingungen (f) – (i) aus dem Beweis des Theorems 6.1. Diese Bedingungen betreffen die Wahl der Modulationsfunktion. Während die Beschränktheit von (f) und (g) direkt durch die Vorgabe der Modulationsfunktion sichergestellt werden kann, muss für die Beschränktheit von (h) und (i) eine von Null verschiedene Abtastzeit gewählt werden. Dadurch weisen die beiden partiellen Ableitungen (3.37) und (3.38) keine Singularität auf und führen für eine beschränkte Funktion ebenfalls auf eine beschränkte partielle Ableitung. Aus Anwendungssicht stellt die von Null verschiedene Abtastzeit und damit die Annahme 6.1 keine Restriktion dar.

Um eine Aussage bezüglich der Annahme 6.2 und damit den Bedingungen (d) und (e) aus dem Beweis des Theorems 6.1 treffen zu können, müssen die erste und zweite partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen noch untersucht werden. Die partiellen Ableitungen hängen vom gewählten Parameteridentifikationsverfahren ab und werden im nächsten Abschnitt für das Parameteridentifikationsverfahren aus Abschnitt 4.1 untersucht.

Zu der Konvergenzanalyse ist anzumerken, dass durch Erfüllen der Bedingungen (f) – (i) das Newton-Verfahren nicht zwingend gegen die Nullstelle konvergiert, die auch den Ableitungsordnungen entspricht. Dies folgt daraus, dass das Newton-Verfahren ein lokal konvergentes Verfahren ist und somit die Nullstelle, gegen die das Verfahren konvergiert, von den gewählten Startwerten $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ abhängt [AGLR19, S. 209 ff.].

6.1.3 Kombination des Newton-Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation und des Modulationsfunktionsverfahrens zur Parameteridentifikation

Im vorherigen Abschnitt wird zum Lösen des Nullstellenproblems, in das die Ableitungsordnungsidentifikation fraktionaler Systeme im Abschnitt 6.1.1 überführt wurde, das Newton-Verfahren eingesetzt. Dafür gilt die Annahme, dass die in der zugrunde gelegten Identifikationsgleichung (6.6) auftretenden Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ (6.2) und deren partiellen Ableitungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ und $\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ bekannt sind. In diesem Abschnitt wird diese Annahme fallengelassen, sodass diese Größen ebenfalls zu ermitteln sind. Zur Bestimmung der Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ wird die Ableitungsordnungsidentifikation mit der Parameteridentifikation aus Abschnitt 4.1 kombiniert. Basierend auf der Berechnungsvorschrift zur Parameteridentifikation (3.60) werden die partiellen Ableitungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ und $\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ bestimmt und entsprechend dem Theorem 6.1 auf Beschränktheit überprüft.

Kombination der Ableitungsordnungsidentifikation mit der Parameteridentifikation

Da das Ausgangssignal als rauschfrei angenommen wird, wird für das Parameteridentifikationsverfahren aus Abschnitt 4.1 die LS-Methode eingesetzt. Nach dem Aufstellen des Messvektors $\boldsymbol{z}$ (4.13) und der Messmatrix $\boldsymbol{M}$ (4.14) werden die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ (6.2) durch

$$\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) = \left[\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) \tag{6.23}$$

bestimmt, wobei die Normierung aus Annahme 3.1 mit $\hat{a}_n = a_n = 1$ gilt (siehe Lemma 4.3). Im Gegensatz zu Abschnitt 4.1 sind in diesem Fall die Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems nicht bekannt. Stattdessen werden die Ableitungsordnungen des aktuellen Iterationsschritts $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ von (6.8) für die Parameteridentifikation in (6.23) verwendet.

In Abschnitt 6.1.1 wird die Funktion (6.1) einzig in Abhängigkeit der Ableitungsordnung $\boldsymbol{\theta}$ angenommen, wobei auch die Parameter $\boldsymbol{p}$ unbekannt sind. Durch die explizite Berechnungsvorschrift (6.23) für die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ lässt sich die Abhängigkeit der Funktion (6.6) von den Parametern eliminieren. Einsetzen von (6.23) in (6.6) ergibt

$$f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) = \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n,q}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right\}_{n-i} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{i,q}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1}\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right\}_{n+m+1-k} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{k,q}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.24}$$

für die Ableitungsordnungen des aktuellen Iterationsschritts $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ von (6.8). Die resultierende Identifikationsgleichung (6.24) hängt nur noch von den zu identifizierenden Ableitungsordnungen ab. Dies rechtfertigt die im Abschnitt 6.1.1 getroffene Annahme. Weiterhin ermöglicht (6.24), dass Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems unabhängig von den Parametern identifiziert werden können.

Partielle Ableitungen der Parameter

Durch die Verwendung der Berechnungsvorschrift (6.23) zur Parameteridentifikation lassen sich die erste und zweite partielle Ableitung der Parameter explizit angeben. Die erste partielle Ableitung wird sowohl zum Aufstellen der Jacobi-Matrix (6.9) als auch zur Konvergenzanalyse des Newton-Verfahrens aus dem vorherigen Abschnitt benötigt. Die zweite partielle Ableitung hingegen ist ausschließlich für die Konvergenzanalyse erforderlich (siehe Theorem 6.1).

Lemma 6.3 (Erste partielle Ableitung der Parameter nach der Ableitungsordnung)

Sei $t, t_0, t_1, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 \leq t_{a,h} < t_{e,h}$, γ *eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft* $(P4)$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\beta_k} u(t), \tag{6.25}$$

die FDGL, $\boldsymbol{p} = [a_{n-1}, \ldots, b_0]$, $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_n, \ldots, \beta_0]$, $N_p \geq n+m+1$, $N_\theta = n+m+2$, $q \in \mathbb{N}_0$ *der aktuelle Iterationsschritt von* (6.8), $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq N_p\}$, $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{J} := \{j \in \mathbb{N} | j \leq N_\theta\}$, $j \in \mathcal{J}$, $\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left[\boldsymbol{m}_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{m}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{m}_{N_p}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top$ *die Messmatrix mit*

$$\boldsymbol{m}_h^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n-1}}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\right.$$
$$\left.\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_m}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right] \tag{6.26}$$

und $\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[z_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \ldots,\ z_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \ldots,\ z_{N_p}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top$ *der Messvektor mit*

$$z_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \tag{6.27}$$

entsprechend Lemma 4.3. Ferner beschreibt $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *das* j*-te Element des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$*. Der Übersichtlichkeit wegen wird der Index des Iterationsschritts* q *in diesem Lemma und im zugehörigen Beweis nicht aufgeführt.*
Die partielle Ableitung der Parameter bezüglich des j*-ten Elements des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *berechnet sich zu*

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \left[\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}\left[\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{z}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \right.$$
$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) - \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right], \tag{6.28}$$

wenn die Parameteridentifikation mit der LS-Methode (6.23) *erfolgt.*

Beweis:
Der erste Schritt des Beweises ist, dass das für die Parameteridentifikation aufgestellte Gleichungssystem (4.12)

$$\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \tag{6.29}$$

mit der transponierten Messmatrix $\boldsymbol{M}$ von links multipliziert wird:

$$\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{6.30}$$

Dieser Ausdruck wird nach $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ abgeleitet. Unter Berücksichtigung der Produktregel folgt

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} =$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{z}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}, \tag{6.31}$$

die nach den partiellen Ableitungen der Parameter $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ umgestellt wird. □

Sofern das fraktionale System ausreichend angeregt wurde und die einzelnen Messgleichungen linear unabhängig sind, existiert die Inverse von $\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\,\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Diese beiden Voraussetzungen für die Inverse sind ebenfalls essentiell für die Parameteridentifikation, da ansonsten die Parameter nicht mit (6.23) ermittelt werden können.

Lemma 6.4 (Zweite partielle Ableitung der Parameter nach der Ableitungsordnung)

Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.3 gegeben und sei zusätzlich $\mathcal{K} := \{\kappa \in \mathbb{N} | \kappa \leq N_\theta\}$, $\kappa \in \mathcal{K}$ und $\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ die erste partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen entsprechend Lemma 6.3. Der Übersichtlichkeit halber wird die Abhängigkeit von den Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ in diesem Lemma und im zugehörigen Beweis nicht aufgeführt.
Die zweite partielle Ableitung der Parameter bezüglich des j-ten und κ-ten Elements des Ableitungsordnungsvektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} = \left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\Bigg[&\frac{\partial^2\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\boldsymbol{z} + \frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} + \\ &\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j} + \boldsymbol{M}^\top\frac{\partial^2\boldsymbol{z}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} - \frac{\partial^2\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{p}} - \\ &\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\boldsymbol{M}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} - \frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\hat{\boldsymbol{p}} - \\ &\boldsymbol{M}^\top\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{\partial\boldsymbol{M}^\top}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\boldsymbol{M}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j} - \boldsymbol{M}^\top\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\Bigg],\end{aligned} \tag{6.32}$$

wenn die Parameteridentifikation mit dem Ansatz (6.23) *erfolgt.*

Beweis:
Im ersten Schritt wird die erste partielle Ableitung der Parameter (6.31) ein weiteres Mal nach der Ableitungsordnung $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ differenziert. Unter Berücksichtigung der Produktregel und der Annahme, dass $\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\,\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ vollen Rang besitzt, folgt (6.32) durch Umstellen nach der gesuchten Größe $\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ analog zum Beweis des Lemmas 6.3. □

Da die Elemente in $\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\boldsymbol{z}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ lediglich von genau einer Ableitungsordnung abhängen, beispielsweise alle Elemente des Vektors $\boldsymbol{z}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ von $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_1 = \hat{\alpha}_n$, werden viele Ausdrücke je nach Wahl der Elemente j und κ zu Null. Zum Beispiel ergibt sich die zweite partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen für $j = 1$ und $\kappa \neq 1$ zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_1\,\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa} = \left[\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\,\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}\Bigg[&\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\frac{\partial\boldsymbol{z}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_1} - \\ &\frac{\partial\boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_1} - \boldsymbol{M}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}})\frac{\partial\boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_1}\Bigg].\end{aligned} \tag{6.33}$$

Beschränktheit der ersten und zweiten partiellen Ableitung

Mit (6.23), (6.28) und (6.32) stehen Berechnungsvorschriften zur Bestimmung der Parameter und deren partiellen Ableitungen nach den Ableitungsordnungen zur Verfügung. Damit bei Anwendung der LS-Methode das Newton-Verfahren konvergiert und somit die Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems identifiziert werden können, müssen dem Theorem 6.1 nach die partiellen Ableitungen der Parameter (6.28) und (6.32) beschränkt sein. Die Untersuchung erfolgt in den beiden nachfolgenden Lemmata.

Lemma 6.5 (Beschränktheit der ersten partiellen Ableitung der Parameter)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.3 gegeben. Ferner beschreibt $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,j)}$ *das* (h,j)*-te Element und* $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,:)}$ *die* h*-te Zeile der Matrix* $\boldsymbol{M}$.
Die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ (6.28) *aus Lemma 6.3 ist beschränkt, wenn die Abtastzeit endlich ist und das Ein- sowie Ausgangssignal und die Modulationsfunktion beschränkt sind.*

Beweis:
Der Beweis ist im Anhang C.4 geführt. □

Lemma 6.6 (Beschränktheit der zweiten partiellen Ableitung der Parameter)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.3 gegeben. Ferner beschreibt $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,j)}$ *das* (h,j)*-te Element und* $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,:)}$ *die* h*-te Zeile der Matrix* $\boldsymbol{M}$.
Die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ (6.32) *aus Lemma 6.4 ist beschränkt, wenn die Abtastzeit endlich ist und das Ein- und Ausgangssignal sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind.*

Beweis:
Der Beweis ist im Anhang C.5 gegeben. □

Aus den Lemmata 6.5 und 6.6 folgt, dass die partiellen Ableitungen der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial^2\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ beschränkt sind, wenn die Abtastzeit von Null verschieden ist und das Ein- und Ausgangssignal sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind. Dadurch wird die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation sichergestellt.

Theorem 6.2 (Konvergenz der gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation)
Sei die iterative Vorschrift (6.8) *des Newton-Verfahrens für die Funktion* $\boldsymbol{f}$ (6.7) *eines fraktionalen Systems mit der Jacobi-Matrix* (6.9) *und sei das Modulationsfunktionsverfahren aus Kapitel 4 zur Parameteridentifikation* (6.23) *gegeben und sei* γ *eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft* $(P4)$.

Bei einer Kombination des Newton-Verfahrens zur Ableitungsordnungsidentifikation (6.8) *mit dem Parameteridentifikationsverfahren aus Kapitel 4 existiert ein lokal konvergentes Verfahren zur gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation, wenn die Abtastzeit von Null verschieden, die Modulationsfunktion beschränkt und die Annahme 3.4 gültig ist.*

Beweis:
Der Beweis folgt direkt aus der Kombination des Theorems 6.1 und den Lemmata 6.3 bis 6.6. □

Praktische Umsetzung

Der Nachteil der LS-Methode in Blockverarbeitung (6.23) ist aus praktischer Sicht, dass für die Parameteridentifikation zunächst sämtliche Identifikationsgleichungen gespeichert werden müssen, bevor die Identifikation stattfindet. Mit der rekursiven LS-Methode, dessen Gleichungen für das Modulationsfunktionsverfahren im Lemma 3.13 angegeben sind, steht ein weniger rechenintensiver und echtzeitfähiger Algorithmus zur Verfügung [IM11, S. 269]. Allerdings lassen sich die erste und zweite partielle Ableitung der Parameter nicht mehr analytisch angeben. In diesem Fall wird auf den Differenzenquotienten zurückgegriffen.

Definition 6.1 (Differenzenquotient zur Approximation der ersten partiellen Ableitung der Parameter)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.3 gegeben. Ferner sei $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\boldsymbol{e}_j = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]^\top$ *der Einheitsvektor, wobei das* j*-te Element* 1 *ist.*
Der Differenzenquotient zur Approximation der ersten partiellen Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen ist

$$\frac{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}_i}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \approx \frac{\left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \Delta \boldsymbol{e}_j\right)\right\}_i - \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}_i}{\Delta}. \tag{6.34}$$

Definition 6.2 (Differenzenquotient zur Approximation der zweiten partiellen Ableitung der Parameter)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.3 gegeben. Ferner sei $\mathcal{K} := \{\kappa \in \mathbb{N} | \kappa \leq N_\theta\}$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\boldsymbol{e}_j = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]^\top$ *der Einheitsvektor, wobei das* j*-te Element* 1 *ist.*
Der Differenzenquotient zur Approximation der zweiten partiellen Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen ist

$$\frac{\partial^2 \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}_i}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa} \approx \frac{\left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\Delta \boldsymbol{e}_j\right)\right\}_i - \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \Delta \boldsymbol{e}_j - \Delta \boldsymbol{e}_\kappa\right)\right\}_i - \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}_i + \left\{\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \Delta \boldsymbol{e}_\kappa\right)\right\}_i}{\Delta^2}. \tag{6.35}$$

Die Bedingungen, dass sowohl die erste als auch zweite partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen entsprechend dem Theorem 6.1 beschränkt sein müssen, bleibt ebenfalls beim Verwenden des Differenzenquotienten (6.34) und (6.35) gültig. Diese sind genau dann beschränkt, wenn die identifizierten Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ beschränkt sind, das über die Annahme 3.4 sichergestellt wird. Somit konvergiert das Newton-Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation ebenfalls bei Anwendung der rekursiven LS-Methode in Kombination mit den Differenzenquotienten (6.34) und (6.35). Im Gegensatz zu der LS-Methode in Blockverarbeitung lässt sich die rekursive Berechnungsvorschrift nicht in die Funktion (6.6) entsprechend (6.24) einsetzen. Dies macht ein zweistufiges iteratives Verfahren notwendig, wobei in den Stufen abwechselnd die Parameter- und die Ableitungsordnungen identifiziert werden. Zwei mögliche Umsetzungen sind in der Abbildung 6.2 dargestellt [SKH20].

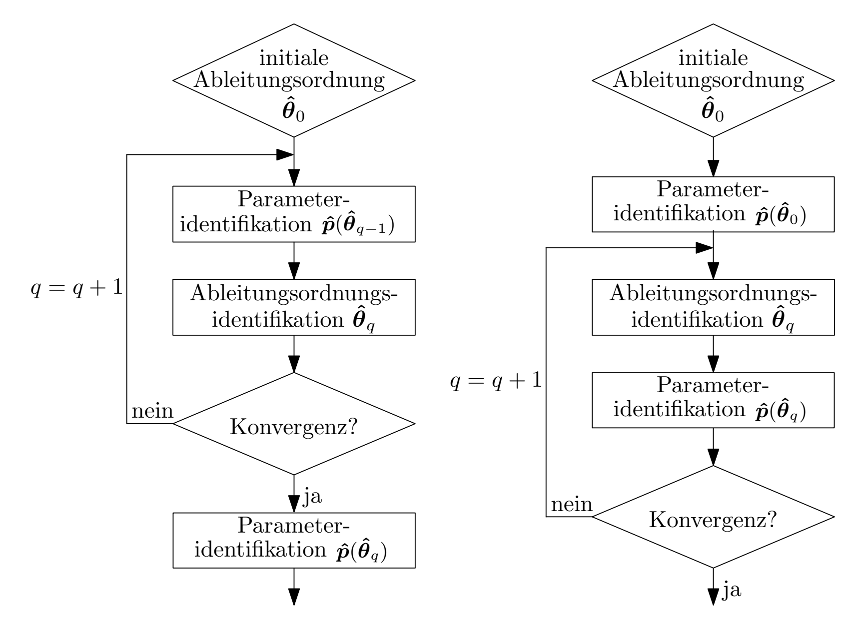


Abbildung 6.2: Zwei Möglichkeiten ein zweistufiges iteratives Verfahren zur Bestimmung der Parameter und der Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems beim Einsetzen der rekursiven LS-Methode zu realisieren [SKH20]

Wahl der Modulationsfunktion

Die Modulationsfunktion muss für die Konvergenz nach den Theorem 6.1 beschränkt sein. Da die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt, die für die Eliminierung des Initialisierungseinflusses hinreichend ist, wird diese auf Beschränktheit überprüft.

Lemma 6.7 (Beschränktheit der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion)
Sei γ eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *entsprechend Definition 4.1 gegeben.*
Die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *ist beschränkt, wenn die Anzahl der Impulse s endlich ist (siehe Definition 4.1).*

Beweis:
Eine endliche Anzahl an Impulsen s hat zur Folge, dass jede Gewichtung der Impulse durch den Binomialkoeffizienten in (4.17) beschränkt ist. Da das Integral einer beschränkten Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist [Zei13, S. 313 ff.], ist die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion genau dann beschränkt, wenn die Anzahl an Impulse endlich ist. □

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation hergeleitet. Da sowohl die für die Ableitungsordnungsidentifikation zugrunde gelegte Funktion (6.1) als auch das Parameteridentifikation aus Kapitel 4 auf dem Modulationsfunktionsverfahren basiert, ist eine Identifikation für ein nicht in Ruhe befindliches fraktionales System möglich. Dafür muss die eingesetzte Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ besitzen, wobei mit der gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) eine solche in der Arbeit gegeben ist. Damit stellt das hergeleitete Verfahren einen fundamentalen Beitrag zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage dar.

Beispiel 6.2:
Die kombinierte Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird für das fraktionale System

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_2} y(t) + a_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = b_0 \, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\beta_0} u(t) \tag{6.36} $$

demonstriert. Die zu identifizierenden Parameter sind $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ und die Ableitungsordnungen $\alpha_2 = 1{,}4$, $\alpha_1 = 0{,}6$ und $\beta_2 = 0{,}2$. Der Parameter $a_2 = 1$ ist entsprechend der Annahme 3.1 festgesetzt. Die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird zum Zeitpunkt $t_1 = 30\,\mathrm{s}$ mit einem Identifikationshorizont von $T_i = 30\,\mathrm{s}$ gestartet. Die gesamte Simulationsdauer beträgt $T_{ges} = 500\,\mathrm{s}$ und die Abtastzeit wird zu $T = 0{,}02\,\mathrm{s}$ gewählt. Als Anregungssignal u wird Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer Amplitude von 1 und einem Sprungabstand von $1\,\mathrm{s}$ verwendet. Das Anregungssignal u ist in der Abbildung 6.3 (oben) und das zugehörige Ausgangssignal y in der Abbildung 6.3 (unten) dargestellt. Allerdings wird für die bessere Übersichtlichkeit nicht der gesamte Signalverlauf des Eingangs und des Ausgangs, sondern nur die ersten 200 Sekunden abgebildet. Der Start der Identifikation ist in beiden Grafiken als gepunktete Linie eingezeichnet.

Als Modulationsfunktion wird die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) *mit den beiden Parametern $s = 10$ und $o = 5$ eingesetzt, wodurch diese die Eigenschaft $(P1)$ wegen $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ und $s \geq o + 2$ besitzt. Da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft $(P4)$. Durch die Wahl der Impulsanzahl mit $s = 10$ wird sichergestellt, dass die Bedingung aus Lemma 6.7 für die Beschränktheit der gewichteten*

Spline-Type-Modulationsfunktion erfüllt ist. Die Integrale des Modulationsfunktionsverfahrens werden mit der Trapezregel berechnet, dessen Intervallgröße der Abtastzeit T entspricht. Um eine neue Gleichung zu erzeugen, wird die Modulationsfunktion um $T_\Delta = 20\,\mathrm{s}$ weitergeschoben, sodass das erste Intervall $[30\,\mathrm{s}, 60\,\mathrm{s}]$ und das zweite Intervall $[50\,\mathrm{s}, 70\,\mathrm{s}]$ ist. Die Startwerte werden zu $\hat{\alpha}_{2,0} = 1{,}3$, $\hat{\alpha}_{1,0} = 0{,}7$, $\hat{\alpha}_{0,0} = 0$ und $\hat{\beta}_{0,0} = 0{,}1$ gewählt, die den initialen Vektor der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = [1{,}3,\ 0{,}7,\ 0,\ 0{,}3]^\top$ bilden.

In diesem Beispiel wird die rekursive LS-Methode aus Lemma 3.13 eingesetzt. Daher sind sowohl für das Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation als auch für das zur Parameteridentifikation Abbruchbedingungen aufzustellen. In beiden Fällen wird das Verfahren einerseits nach $n_p = n_\theta = 100$ Iterationen abgebrochen. Andererseits werden die Verfahren auch dann beendet, wenn die Änderung der Ableitungsordnungen beziehungsweise der Parameter zweier aufeinanderfolgender Iterationen geringer als die Toleranz $\varepsilon_p = \varepsilon_\theta \leq 10^{-6}$ ist.

Die Ableitungsordnungen sind in der Abbildung 6.4 und die dazugehörigen Parameter in der Abbildung 6.5 über der Iteration des Newton-Verfahrens als durchgezogene Linie aufgetragen. Für die Darstellung der Ergebnisse der Parameteridentifikation ist anzumerken, dass nur die Parameter nach Abbruch des Parameteridentifikationsverfahrens für die aktuellen Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ aufgetragen sind. Somit sind die Parameter der Iteration $q = 0$ die Parameter, die sich für die Startwerte der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ergeben. Das Identifikationsverfahren endet nach 45 Iterationen, da die Abweichung der Ableitungsordnungen zu den Ergebnissen aus der vorherigen Iteration geringer als die Toleranz ist. Auffällig bei den Ergebnissen ist, dass sich einerseits die Ableitungsordnung α_0 aufgrund der korrekten Startwertwahl nicht ändert. Andererseits sind die initialen Ableitungsordnungen nahe der Referenzwerte gewählt worden. Dies hängt mit der lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens [AGLR19, S. 209 ff.] und dem kleinen Einzugsbereich für den vorliegenden Fall zusammen.

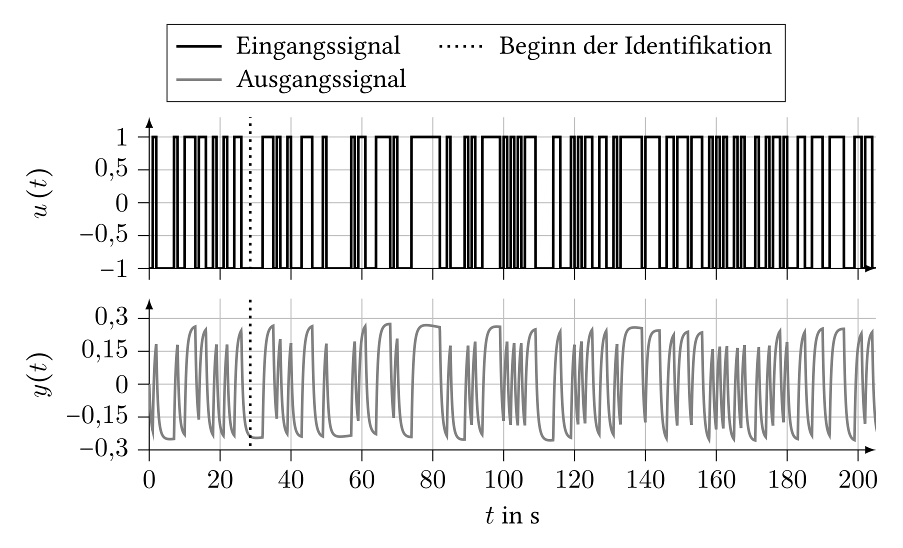


Abbildung 6.3: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und das resultierende Ausgangssignal (unten) für die gemeinsame Ableitungsordnungsidentifikation mit dem Newton-Verfahren (6.8)

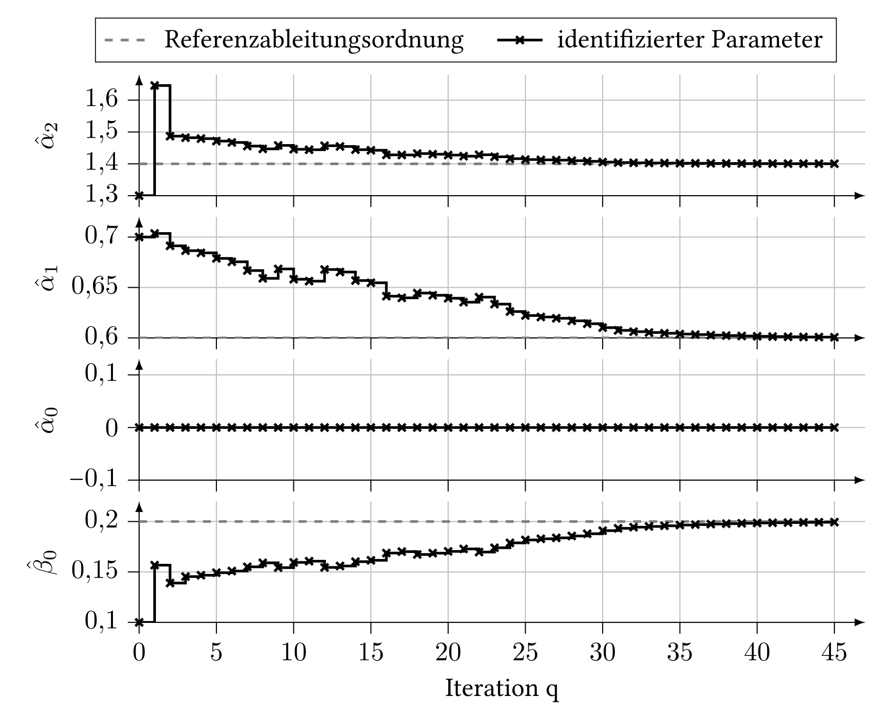


Abbildung 6.4: Entwicklung der Ableitungsordnungen, die sich zu jedem Iterationsschritt des Newton-Verfahrens ergeben

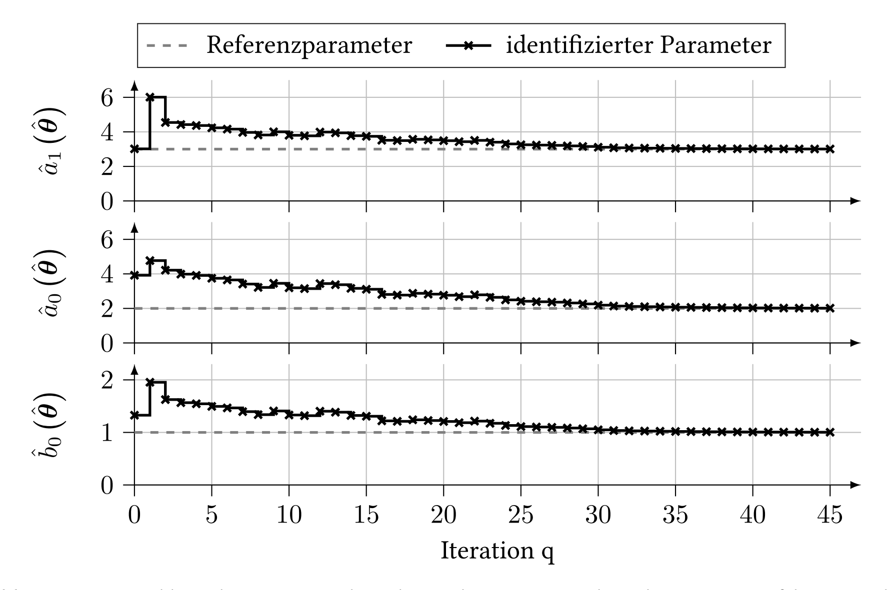


Abbildung 6.5: Entwicklung der Parameter, die sich zu jedem Iterationsschritt des Newton-Verfahrens in Abhängigkeit der aktuellen Ableitungsordnungen ergeben

6.1.4 Iterative Spline-Interpolation zur Ableitungsordnungsidentifikation

Zum Lösen des im Abschnitt 6.1.1 formulierte Nullstellenproblems zur Ableitungsordnungsidentifikation wird im Abschnitt 6.1.2 ein Ansatz basierend auf dem Newton-Verfahren vorgeschlagen. Das Newton-Verfahren bestimmt jedoch die Nullstellen eines Problems nur näherungsweise, sodass mit dem hergeleiteten Verfahren die Ableitungsordnungen angenähert werden. In diesem Abschnitt wird hingegen die für die Ableitungsordnung zugrunde gelegte Funktion (6.1) approximiert. Der sich daraus ergebende Vorteil ist, dass für die approximierte Funktion eine analytische Berechnungsvorschrift zur Ermittlung der Nullstelle existiert, das Vorteile bei der praktischen Umsetzung mit sich bringt.

Der in diesem Abschnitt verfolgte Ansatz setzt ein kommensurables System

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_1}\mathrm{D}_t^{i\alpha} y\left(t\right) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\,t_1}\mathrm{D}_t^{k\alpha} u\left(t\right) \tag{6.37}$$

voraus, dessen Ableitungsordnung α zu bestimmen ist. Zunächst wird wie im Abschnitt 6.1.2 angenommen, dass die Parameter des fraktionalen Systems (6.37) bekannt sind. Diese Annahme wird in einem zweiten Schritt entsprechend dem Abschnitt 6.1.3 fallengelassen. Zur Unterscheidung von der Ableitungsordnung des Systems α wird für die identifizierte Größe $\hat{\alpha}$ verwendet (siehe Abschnitt 6.1.1).

Kubische Spline-Funktion

In der vorliegenden Arbeit wird eine kubische Spline-Funktion zur Approximation der Funktion (6.1) eingesetzt. Nach [FH07, S. 112 ff.] sind kubische Spline-Funktionen wie folgt definiert.

Definition 6.3 (Kubische Spline-Funktion)
Sei $X_\Delta := [x_0 < x_1 < \ldots < x_N]$ *eine Unterteilung des Intervalls* $[x_0,\, x_N]$.
Eine reelle Funktion $\zeta : [x_0,\, x_N] \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

(a) $\zeta \in \mathcal{C}^2\,[x_0,\, x_N]$ *und*

(b) ζ *stimmt auf jedem Teilintervall* $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$ *mit einem kubischen Polynom überein*

ist eine zu X_Δ *gehörende kubische Spline-Funktion.*

Wenn die kubische Spline-Funktion eine Familie[22] $Y := (y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_N)$ mit $\zeta\,(Y; x_i) = y_i$ für $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N$ abbildet, wird diese als interpolierende Splinefunktion $\zeta\,(Y; x)$ bezeichnet. Die Familie kann aus Messdaten oder der Evaluierung einer Funktion f an den Stützstellen x_i des Teilintervalls X_Δ erzeugt werden. Um eine eindeutige Spline-Funktion zu erhalten, sind zwei weitere Anforderungen zu stellen. Gängige Anforderungen [FH07, S. 113] sind

[22] Als Familie wird die Abbildung einer Menge auf eine andere Menge bezeichnet und eine Familie wird häufig als Menge von Wertepaaren dargestellt [ABH$^+$13, S. 42].

(A1) $\zeta^{(2)}(Y;x)\big|_{x=x_0} = \zeta^{(2)}(Y;x)\big|_{x=x_N} = 0,$

(A2) $\zeta^{(k)}(Y;x)\big|_{x=x_0} = \zeta^{(k)}(Y;x)\big|_{x=x_N} = 0$ für $k = 0,\, 1,\, 2$ oder

(A3) $f^{(1)}(x)\big|_{x=x_0} = \zeta^{(1)}(Y,x)\big|_{x=x_0}$ und $f^{(1)}(x)\big|_{x=x_N} = \zeta^{(1)}(Y,x)\big|_{x=x_N}$,

wobei jeder Punkt (A1) – (A3) durch die Unter- und Obergrenze x_0 und x_N zwei Anforderungen repräsentiert. Im Bezug auf die Ableitungsordnungsidentifikation entspricht die Funktion f der Funktion (6.1). Diese Funktion (6.1) erfüllt im Allgemeinen die Punkte (A1) und (A2) nicht. Daher wird für die eindeutige Beschreibung die Anforderungen des Punkts (A3) gewählt. Die dafür notwendige Ableitung $\partial f(\hat{\alpha})/\partial \hat{\alpha}$ lässt sich nach (6.12) berechnen. Die Aussagen bezüglich der partiellen Ableitungen der Parameter ist wie beim Newton-Verfahren abhängig von dem gewählten Parameteridentifikationsverfahren und wird detailliert im Abschnitt 6.1.3 behandelt.

Iterative Spline-Interpolation für bekannte Parameter

Allgemein gilt, dass kubische Spline-Funktionen für sehr kleine Teilintervalle $[x_i,\, x_{i+1}]$ gegen die im Intervall I zu approximierende Funktion f konvergieren, solange $\|f^{(4)}\|_{\infty,I}$ existiert und endlich ist [FH07, S. 122 ff.]. Für die Identifikation der Ableitungsordnung muss die kubische Spline-Funktion gegen die Funktion (6.1) lediglich um deren Nullstellen konvergieren, da die Nullstellen der Funktion (6.1) mögliche Kandidaten für die Ableitungsordnung des Systems (6.37) sind (siehe Abschnitt 6.1.1). Mit der iterativen Spline-Interpolation werden die Teilintervalle gezielt um die Nullstellen der Identifikationsgleichung weiter aufgeteilt, um eine Konvergenz der kubischen Spline-Funktion gegen die Identifikationsgleichung um die Nullstellen zu erreichen.

Das Vorgehen der iterativen Spline-Interpolation für bekannte Parameter setzt sich aus den sieben Schritte zusammen:

(a) Vorgabe des Suchintervalls $I := [\hat{\alpha}_u,\, \hat{\alpha}_o]$,

(b) Festlegung weiterer Stützstellen $\hat{\alpha}_k$ zu der Unter- $\hat{\alpha}_u$ und Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ für die Startstützstellen $\hat{\alpha}_i$,

(c) Berechnung der Ableitung der Identifikationsgleichung $f^{(1)}$ (6.12) an der Untergrenze $\hat{\alpha}_u$ und der Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ des Intervalls I,

(d) Evaluierung der Funktion (6.1) an den Stützstellen $\hat{\alpha}_i$,

(e) Berechnung der kubischen Spline-Funktion ζ aus den Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ und den zugehörigen Funktionswerten der Funktion (6.1),

(f) Anwenden der Cardanischen Formel zur Bestimmung der Nullstellen r_i der kubischen Spline-Funktion ζ sowie

(g) Erweitern der Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ um die Nullstellen r_i von (f) und Beginn wieder bei (d).

Im Schritt (a) wird das zu untersuchende Intervall $I := [\hat{\alpha}_u,\, \hat{\alpha}_o]$ vorgegeben, das die Ableitungsfunktion α des Systems (6.37) beinhalten muss. Die Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ zum Start der iterativen Spline-Interpolation sind im Schritt (b) auszuwählen. Die einzige Einschränkung bei der Stützstellenwahl ist, dass die Unter- $\hat{\alpha}_u$ und Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ als zwei Stützstellen feststehen. Ansonsten können die Stützstellen beliebig beispielsweise äquidistant durch

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_u + i\frac{\hat{\alpha}_o - \hat{\alpha}_u}{N} \tag{6.38}$$

mit $i = 1, \ldots, N-1$ im Intervall I verteilt werden. Bei der Wahl der Stützstellen ist zu beachten, dass eine höhere Anzahl an Stützstellen eine genauere Approximation verspricht, aber die genauere Approximation auf Kosten von Rechenzeit erfolgt [FH07, S. 122 ff.]. Um die Anforderung (A3) bei der Berechnung der kubischen Spline-Funktion erfüllen zu können, wird die Ableitung der Identifikationsgleichung $f^{(1)}$ (6.12) an der Untergrenze $\hat{\alpha}_u$ und der Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ benötigt. Mit (6.12) steht die Berechnungsvorschrift für die Ableitung $f^{(1)}$ zur Verfügung, in der die Ableitungen der Parameter nach der Ableitungsordnung $\partial \boldsymbol{p}(\hat{\alpha})/\partial \hat{\alpha}$ auftreten. Diese sind für diesen Abschnitt aufgrund der Annahme, dass die Parameter bekannt sind und sich daher in Abhängigkeit der Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ nicht ändern, Null. Die Berechnung der Ableitungswerte bildet den Schritt (c).

Der Schritt (d) besteht aus der Evaluierung der Funktion (6.1) für die Stützstelle $\hat{\alpha}_i$. Zudem werden die Stützstellen, die Funktionswerte und die Ableitungswerte der Funktion an der Untergrenze $\hat{\alpha}_u$ und der Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ in der Tupelmenge

$$S_{\mathrm{T}} = \left\{\left(\hat{\alpha}_i;\, f\left(\hat{\alpha}_i\right);\, f^{(1)}\left(\hat{\alpha}_u\right);\, f^{(1)}\left(\hat{\alpha}_o\right)\right)\right\} \tag{6.39}$$

erfasst. Den Schritt (e) bildet die Berechnung der kubischen Spline-Funktion ζ mit der zusätzlichen Anforderung (A3) [FH07, S. 117 ff.] aus den Daten der Tupelmenge S_{T}. Mit der Cardanischen Lösungsformel [Zei13, S. 595 f.] werden die Nullstellen der kubischen Spline-Funktion ζ im Schritt (f) bestimmt. Diese Nullstellen werden als zusätzliche Stützstellen $\hat{\alpha}_k$ interpretiert und mit den bisherigen Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ für die nächste Iteration als neue Startstützstellen $\hat{\alpha}_i$ zusammengefasst. Dadurch werden die Nullstellen der kubischen Spline-Funktion ζ in der nächsten Iteration im Schritt (d) an den eigentlichen Funktionswert der Funktion (6.1) angepasst. Dieses stellt sicher, dass sich die kubische Spline-Funktion ζ der Funktion (6.1) annähert.

Da es sich um ein iteratives Verfahren handelt, ist für die praktische Anwendung mindestens eine Abbruchbedingung zu formulieren. Neben einer vorgebbaren maximalen Anzahl an Iterationen lässt sich auch die Änderung der Nullstellen zwischen zwei Iterationen als Abbruchbedingung betrachtet. Unter der Annahme, dass R Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_R$ mittels der iterativen Spline-Interpolation ermittelt werden, werden nur die Nullstellen der Tupelmenge S_{T} hinzugefügt, für die

$$f\left(r_\kappa\right) \geq \xi \tag{6.40}$$

mit $\kappa = 1, 2, \ldots, R$ und der Toleranz ξ gilt. Wenn kein neues Tupel der Tupelmenge S_{T} hinzugefügt wird, wird das Verfahren beendet. Somit wird über die Toleranz ξ die Güte der Nullstellenapproximation festgelegt.

Eine Besonderheit der iterativen Spline-Interpolation ist, dass alle Nullstellen der Funktion (6.1) approximiert werden. Jede der R Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_R$ stellen einen möglichen Kandidat für die Ableitungsordnung des fraktionalen Systems dar (siehe Abschnitt 6.1.1). Um die zum System zugehörige Ableitungsordnung aus den Kandidaten zu extrahieren, kann beispielsweise eine zweite Funktion entsprechend (6.1) aufgestellt werden. Für diese zweite Funktion kann einerseits eine andere Modulationsfunktion eingesetzt werden. Andererseits kann die zweite Funktion für einen anderen Zeitbereich des Ein- und Ausgangssignals evaluiert werden. Die

zweite Funktion besitzt ebenfalls für die Ableitungsordnung α des Systems (6.37) eine Nullstelle. Für die anderen Kandidaten weist die zweite Funktion im Allgemeinen keine Nullstelle auf. Somit entspricht die Nullstelle, die auch bei der zweiten Funktion eine Nullstelle ist, der gesuchten Ableitungsordnung α des fraktionalen Systems. Falls die zweite Funktion für mehrere mögliche Kandidaten ebenfalls zu Null wird, ist mindestens eine weitere Funktion entsprechend (6.1) notwendig.

Iterative Spline-Interpolation für unbekannte Parameter

Die Annahme, dass die Parameter $\boldsymbol{p}$ des Systems (6.37) bekannt sind, ist im Allgemeinen in der Praxis nicht erfüllt und wird für diesen Abschnitt fallengelassen. Für die Identifikation werden die Parameter entsprechend Abschnitt 6.1.1 als Größen $\hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\alpha})$ aufgefasst, die von einer aktuellen Schätzung der Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ abhängen.

Wenn das Vorgehen der iterativen Spline-Funktion aus dem vorherigen Abschnitt zugrunde gelegt wird, werden die Parameter erstmalig für die Berechnung der Ableitung der Funktion $f^{(1)}$ (6.12) benötigt. Dadurch ändert sich das Vorgehen der iterativen Spline-Funktion gegenüber dem vorherigen Abschnitt zu:

(a) Vorgabe des Suchintervalls $[\hat{\alpha}_u, \hat{\alpha}_o]$,
(b) Festlegung weiterer Stützstellen $\hat{\alpha}_k$ zu der Unter- $\hat{\alpha}_u$ und Obergrenze $\hat{\alpha}_o$für die Startstützstellen $\hat{\alpha}_i$,
(c) Identifikation der Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ für die Stützstellen $\hat{\alpha}_i$,
(d) Berechnung der Ableitung der Funktion $f^{(1)}$ (6.12) an der Unter- $\hat{\alpha}_u$ und der Obergrenze $\hat{\alpha}_o$ des Intervalls I,
(e) Evaluierung der Funktion (6.1) an den Stützstellen $\hat{\alpha}_i$,
(f) Berechnung der kubischen Spline-Funktion ζ aus den Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ und den zugehörigen Funktionswerten der Funktion (6.1),
(g) Anwenden der Cardanischen Formel zur Bestimmung der Nullstellen $\hat{\alpha}_k$ der kubischen Spline-Funktion sowie
(h) Erweitern der Stützstellen $\hat{\alpha}_i$ um die Nullstellen $\hat{\alpha}_k$ von (g) und Beginn wieder bei (c).

Da ein rauschfreies Ausgangssignal angenommen wird, können die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ im Schritt (c) mittels der LS-Methode entsprechend (6.23) bestimmt werden. Für den Schritt (d) muss die Ableitung der Funktion $f^{(1)}$ (6.12) evaluiert werden, in die die partiellen Ableitungen der Parameter $\partial \hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\alpha}) / \partial \hat{\alpha}$ eingehen. Wenn die LS-Methode eingesetzt wird, können diese mit (6.28) bestimmt werden. Zum Schritt (d) ist weiterhin anzumerken, dass dieser nur bei der ersten Iteration ausgeführt werden muss. Dieses liegt daran, dass die Ableitung der Funktion $f^{(1)}$ (6.12) nur für die festen Grenzen des Suchintervalls $\hat{\alpha}_u$ und $\hat{\alpha}_o$ evaluiert werden muss.

Konvergenzanalyse der iterativen Spline-Interpolation

Es gilt allgemein, damit eine Spline-Funktion gegen eine gegebene Funktion f konvergiert, muss $\|f^{(4)}(\boldsymbol{\theta})\|_{\infty,I}$ existieren und endlich sein [FH07, S. 122 ff.]. In der iterativen Spline-Interpolation entspricht die Funktion f der Identifikationsgleichung. Um die Bedingung für die Identifikationsgleichung zu überprüfen, werden zunächst die beiden folgenden Annahmen getroffen.

Annahme 6.3 (Beschränktheit der Modulationsfunktion und deren Ableitungen für die Konvergenzanalyse der iterativen Spline-Interpolation)
Für die Konvergenzanalyse der iterativen Spline-Interpolation wird angenommen, dass

(a) *die Modulationsfunktion* γ,
(b) *die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion* ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)$ *und* ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)$,
(c) *die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ *und* $\partial\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$,
(d) *die zweite partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2$ *und* $\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2$,
(e) *die dritte partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial^3\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^3$ *und* $\partial^3\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^3$ *sowie*
(f) *die vierte partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion* $\partial^4\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^4$ *und* $\partial^4\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^4$

beschränkt sind.

Annahme 6.4 (Beschränktheit der partiellen Ableitungen der Parameter für die Konvergenzanalyse der iterativen Spline-Interpolation)
Für die Konvergenzanalyse der iterativen Spline-Interpolation wird angenommen, dass

(a) *die erste partielle Ableitung der Parameter* $\partial\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ *und* $\partial\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$,
(b) *die zweite partielle Ableitung der Parameter* $\partial^2\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ *und* $\partial^2\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$,
(c) *die dritte partielle Ableitung der Parameter* $\partial^3\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ *und* $\partial^3\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ *sowie*
(d) *die vierte partielle Ableitung der Parameter* $\partial^4\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$ *und* $\partial^4\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa$

beschränkt sind.

Mit den beiden Annahmen 6.3 und 6.4 ergibt sich das nachstehende Lemma für die Konvergenz der Spline-Funktion ζ gegen die Identifikationsgleichung (6.1).

Lemma 6.8 (Konvergenz der Spline-Funktion gegen die Identifikationsgleichung)
Sei ζ eine kubische Spline-Funktion ζ, $I := [\hat{\alpha}_u, \hat{\alpha}_o]$ das für die Approximation berücksichtigte Intervall und γ eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft $(P4)$. Sei zusätzlich die zu approximierende Identifikationsgleichung f (6.1) gegeben.
Die kubische Spline-Funktion ζ konvergiert gegen die Identifikationsgleichung f, wenn das Intervall I in sehr kleine Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ gegliedert wird und die Annahmen 6.3 und 6.4 gültig sind.

Beweis:
Der Beweis ist im Anhang C.6 geführt. □

Mit der iterativen Spline-Interpolation wird ein zweites Verfahren zur gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation von kommensurablen fraktionalen Systemen vorgestellt. Wie das erste Verfahren im Abschnitt 6.1.2 basiert der Ansatz auf dem Modulationsfunktionsverfahren, sodass der Einfluss der Initialisierungsfunktion über eine Modulationsfunktion mit der Eigenschaft $(P4)$ eliminiert werden kann. Während das Newton-Verfahren abhängig der gewählten Startwerte gegen eine Nullstelle konvergiert, wird mittels der iterativen Spline-Interpolation alle Nullstellen der Funktion bestimmt. Aus den Nullstellen muss in einem nachgelagerten Validierungsschritt die Ableitungsordnung des fraktionalen Systems ermittelt werden.

Beispiel 6.3:
In diesem Beispiel wird die Anwendbarkeit der iterativen Spline-Interpolation an dem kommensurablen System

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{2\alpha} y(t) + a_1 \, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha} y(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{6.41} $$

mit den zu identifizierenden Parametern $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ und $\alpha = 0{,}6$ demonstriert. Der Parameter $a_2 = 1$ ist entsprechend der Konvention in der Annahme 3.1 für die Parameteridentifikation normiert. Das System wird mit einem Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] für eine Gesamtdauer von $T_{ges} = 140\,\mathrm{s}$ mit einer Abtastzeit von $T = 0{,}02\,\mathrm{s}$ angeregt. Die Amplitude des Anregungssignal beträgt 1 und der Sprungabsatnd ist $5\,\mathrm{s}$. Das Anregungssignal u ist in der Abbildung 6.6 (oben) und das zugehörige Ausgangssignal y in der Abbildung 6.6 (unten) dargestellt. Außerdem ist der Startzeitpunkt der Identifikation $t = 50\,\mathrm{s}$ durch eine gepunktete Linie gekennzeichnet.

Die Identifikation der Parameter und der Ableitungsordnung erfolgt gemäß den Schritten (a) – (h) der iterativen Spline-Interpolation für unbekannte Parameter. Da das Verfahren auf dem Modulationsfunktionsverfahren basiert, muss eine Modulationsfunktion vorgegeben werden. Dafür wird die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (3.52) mit $s = 10$ und $o = 5$ verwendet, wodurch diese die Eigenschaft $(P1)$ wegen $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ und $s \geq o + 2$ besitzt. Da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft $(P4)$.

Der Identifikationshorizont wird zu $T = 50\,\mathrm{s}$ *und die Differenz zweier Identifikationszeitpunkte zu* $T_\Delta = 10\,\mathrm{s}$ *gewählt. Zusätzlich zu den Einstellparametern des Modulationsfunktionsverfahrens wird das Suchintervall der iterativen Spline-Interpolation mit* $\hat{\alpha} \in [0, 2]$ *und die initialen Abtastpunkte mit* $N = 4$ *vorgegeben, die in dem vorgegebenen Suchintervall nach* (6.38) *äquidistant verteilt werden.*

Falls die Funktion (6.1) *mehrere Nullstellen besitzt, werden diese auch mit der iterativen Spline-Interpolation gefunden. Die Entwicklungen der Nullstellen sind in der Abbildung 6.7 dargestellt, in die auch die vorgegebene Ableitungsordnung* α *als gestrichelte Linie eingezeichnet ist. Die Nullstelle* r_0 *wird durch eine gepunktete Linie und die Nullstelle* r_1 *durch eine durchgezogene Linie repräsentiert. Beide Nullstellen konvergieren nach fünf Iterationsschritten und resultieren in* $r_0 = 0{,}466$ *beziehungsweise* $r_1 = 0{,}604$. *Für die beiden Nullstellen müssen die zugehörigen Parameter bestimmt werden, wofür die LS-Methode* (6.23) *angewendet wird. Die identifizierten Parameter sind in der Abbildung 6.8 dargestellt. Dabei gelten die gleichen Zuordnungen zwischen Linienart und zu der jeweiligen Nullstelle zugehörigen Parametern wie in der Abbildung 6.8.*

Der letzte Schritt der iterativen Spline-Interpolation ist die Validierung der Nullstellen r_0 *und* r_1. *Dafür wird die Funktion* f_{val} *entsprechend* (6.1) *aufgestellt, für die eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit* $s = 10$ *und* $o = 8$ *eingesetzt wird. Diese erfüllt ebenfalls die Bedingung* $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ *und* $s \geq o + 2$ *der Eigenschaft* $(P1)$ *wegen. Da auch* $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ *ist, besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion auch die Eigenschaft* $(P4)$. *Diese Identifikationsgleichung* f_{val} *wird ebenfalls für die beiden Nullstellen* r_0 *und* r_1 *und den zugehörigen Parametern evaluiert. Die Nullstelle* r_1 *weist mit* $f_{\mathrm{val}}(r_1) = 0{,}004$ *gegenüber der anderen Nullstelle mit* $f_{\mathrm{val}}(r_0) = 0{,}932$ *den signifikant kleineren Funktionswert auf und wird folglich als Ableitungsordnung* α *des fraktionalen Systems korrekterweise interpretiert.*

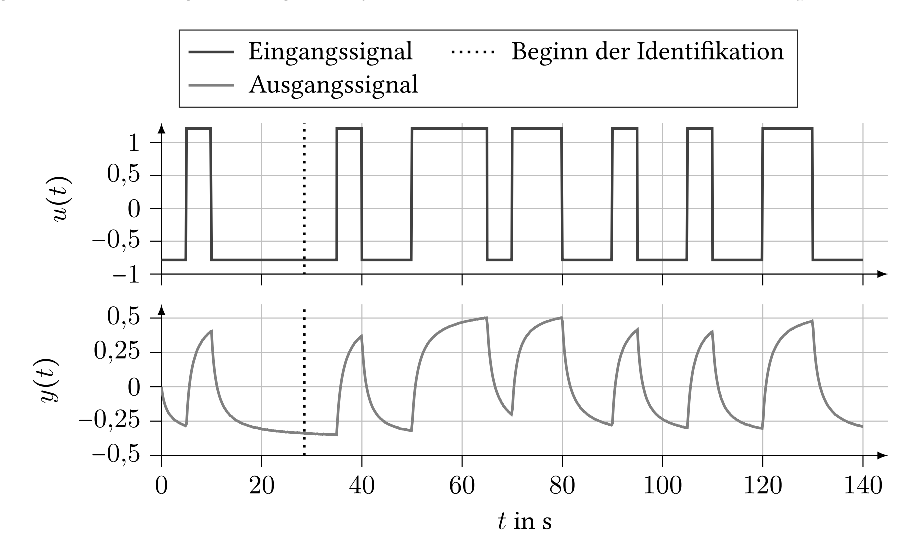


Abbildung 6.6: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und Ausgangssignal (unten) für die gemeinsame Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation mit der iterativen Spline-Interpolation und der LS-Methode

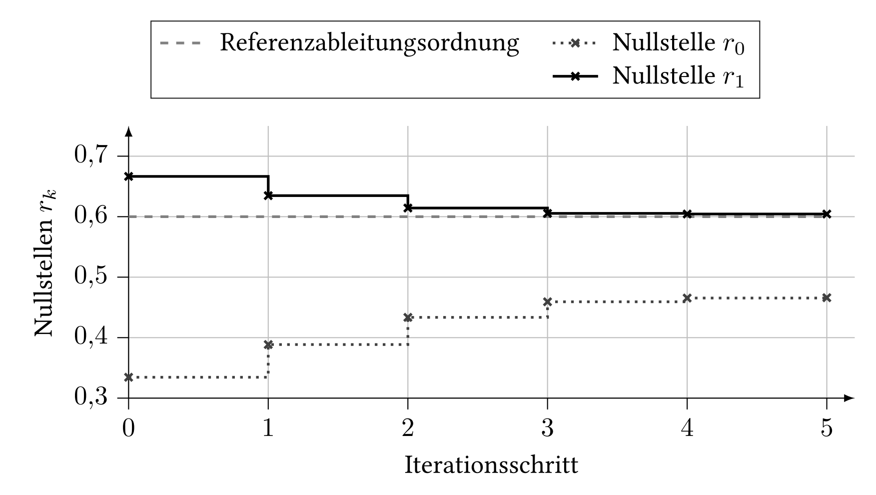


Abbildung 6.7: Entwicklung aller Nullstellen, die die Identifikationsgleichung (6.1) besitzt und folglich Kandidaten für die zu identifizierende Ableitungsordnung darstellen

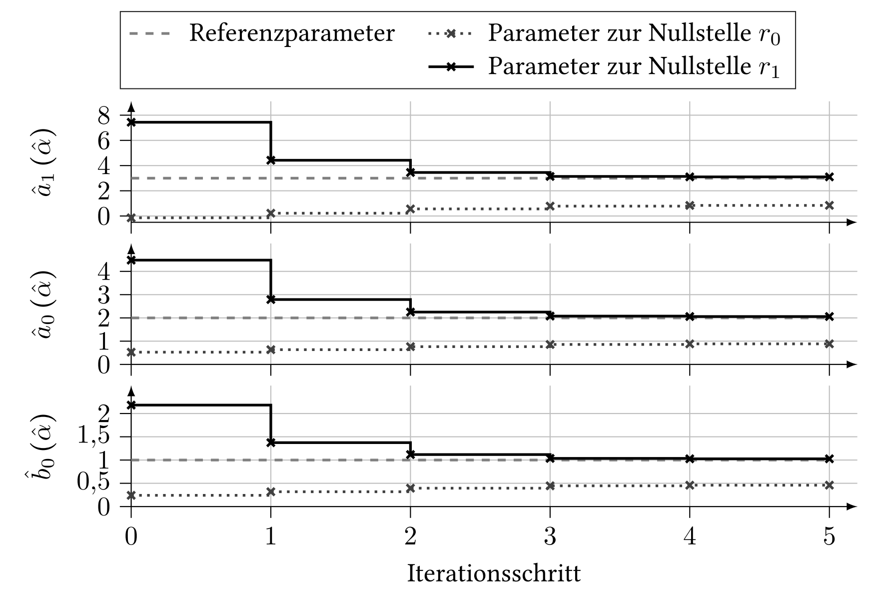


Abbildung 6.8: Entwicklung der Parameter in Abhängigkeit aller Nullstellen, die mit der iterativen Spline-Interpolation bestimmt werden

6.1.5 Einfluss eines verrauschten Ausgangssignal auf das Nullstellenproblem

Die Herleitung der Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation erfolgt in den vorherigen Abschnitten mit der Annahme, dass ein unverrauschtes Ausgangssignal vorliegt. In diesem Abschnitt wird von einem verrauschten Ausgangssignal $\tilde{y}$ ausgegangen, dass sich durch

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon(t) \tag{6.42}$$

mit dem ungestörten Ausgangssignal y und dem Rauschen ε entsprechend der Annahme 3.3 beschreiben lässt. Falls die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt, ergibt sich die Funktion (6.1) beim Verwenden des gestörten Ausgangssignals $\tilde{y}$ anstatt des ungestörten Ausgangssignals y zu

$$\tilde{f}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_1}^{t_2} \tilde{y}(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_2}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_2}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.43}$$

Wie im Abschnitt 6.1 werden auch in diesem Abschnitt die Parameter als Größen, die von den Ableitungsordnungen abhängig sind, betrachtet und die gleichen Notationen zur Unterscheidung der Parameter $\boldsymbol{p}$ und der Ableitungsordnungen $\boldsymbol{\theta}$ des fraktionalen Systems und deren identifizierten Größen $\hat{\boldsymbol{p}}$ und $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ genutzt.

Lemma 6.9 (Einfluss der verrauschten Messung des Ausgangssignals auf die Funktion zur Ableitungsordnungsbestimmung)
Sei $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, γ eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft $(P4)$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\beta_k} u(t), \tag{6.44}$$

die FDGL, $\tilde{y}$ das verrauschte Ausgangssignal (6.42)*, ε das Rauschen mit den Eigenschaften in Annahme 3.3, $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_n, \ldots, \beta_0]$, $f : \mathbb{R}^{n+m+2} \to \mathbb{R}$ die Funktion zur Ableitungsordnungsbestimmung mit dem unverrauschten Ausgangssignal* (6.1) *und $\tilde{f} : \mathbb{R}^{n+m+2} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit dem verrauschtem Ausgangssignal* (6.43)*.*
Der Fehler in der Funktion zur Ableitungsordnungsbestimmung durch das Rauschen ε ist

$$e_{\text{ord}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \tilde{f}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) - f\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.45}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_2}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.46}$$

Beweis:
Um den vom Rauschen erzeugten Fehler zu bestimmen und einen Fehler aufgrund der Parameter oder Ableitungsordnungen auszuschließen, gilt die Annahme, dass sowohl für die Funktion f (6.1) als auch $\tilde{f}$ (6.43) die gleichen Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ in Abhängigkeit der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ermittelt werden. Unter dieser Annahme ergibt sich der Fehler durch Subtraktion (6.1) von (6.43). □

Aufgrund der Verwendung des Modulationsfunktionsverfahrens besitzt die Identifikationsgleichung Freiheitsgrade wie die Modulationsfunktion oder den Identifikationshorizont. Nachfolgend wird geklärt, inwiefern diese genutzt werden können, um den Fehler (6.46) zu verringern. Dafür wird mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung eine Abschätzung nach oben für (6.46) bestimmt, die in

$$\left|e_{\mathrm{ord}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{n} \left|\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right| \left|t_2 - t_1\right| \max_{t\in[t_1,t_2]} \left|\varepsilon\left(t\right) {}_{t}\mathrm{d}GL_{t_2}^{\hat{\alpha}_i}\gamma\left(t\right)\right| \tag{6.47}$$

resultiert. Aus der Abschätzung geht hervor, dass der Fehler proportional zu dem Identifikationshorizont $T_i = t_2 - t_1$, zu der Modulationsfunktion γ und deren Ableitungen nach Grünwald-Letnikov ist. Damit kann der Fehler e_{ord} über die beiden Maßnahmen Verkürzung des Identifikationshorizont und Verkleinerung der Funktionswerte der Modulationsfunktion reduziert werden. Beide Maßnahmen zur Reduzierung des Fehlers können dazu führen, dass die zu invertierende Matrix der LS-Methode (3.60) oder der IV-Methode (4.91) schlecht konditioniert ist [IM11, S. 555 ff.]. Dieses widerspricht jedoch der für die LS-Methode und IV-Methode bestehende Forderung der ausreichenden Anregung, die für eine gute Konditionierung der zu invertierende Matrix führt [IM11, S. 250].

Beispiel 6.4:
Der Einfluss des Rauschens wird für das System (6.5)

$${}_{t_1}\mathrm{D}GL_{t}^{\alpha_1}y\left(t\right) + 10y\left(t\right) = u\left(t\right)$$

mit der Ableitungsordnung $\alpha_1 = 0{,}5$ *in der Abbildung 6.9 illustriert. Wie für die Abbildung 6.1 wird die Funktion* (6.43) *im Bereich* $\hat{\alpha}_1 \in [0,1]$ *mit einer Schrittweite von* $\Delta_\alpha = 0{,}01$ *evaluiert, wofür eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit* $s = 10$ *und* $o = 5$ *eingesetzt wird. Die Evaluierung der Funktion* (6.43) *erfolgt für ein unverrauschtes Ausgangssignal (durchgezogene Linie) und ein mit Rauschen überlagerten Ausgangssignal, wobei zwei Rauschprozesse* $\varepsilon_1(t)$ *und* $\varepsilon_2(t)$ *mit unterschiedlichen Varianzen betrachtet werden. Für einen* $\mathrm{SNR}_1 = 37{,}8\,\mathrm{dB}$ *ergibt sich der gestrichelte Verlauf und für einen* $\mathrm{SNR}_2 = 17{,}7\,\mathrm{dB}$ *der gepunktete Verlauf. Während sich der Verlauf bei dem* SNR_1 *lediglich geringfügig anhebt und damit die Nullstelle verschiebt, weist der Verlauf, der sich für den* $\mathrm{SNR}_2 = 17{,}7\,\mathrm{dB}$ *ergibt, keine Nullstelle mehr auf. Daraus folgt, dass aus dem verrauschten Ausgangssignal mit dem* $\mathrm{SNR}_1 = 37{,}8\,\mathrm{dB}$ *zumindest noch näherungsweise die Ableitungsordnungen des Systems mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren bestimmt werden können. Für das verrauschte Ausgangssignal mit dem* $\mathrm{SNR}_2 = 17{,}7\,\mathrm{dB}$ *hingegen ist eine Ableitungsordnungsidentifikation mit den vorgestellten Verfahren nicht möglich. Folglich lassen sich auch nur für den ersten Fall in Abhängigkeit der verschobenen Nullstellen Parameter identifizieren.*

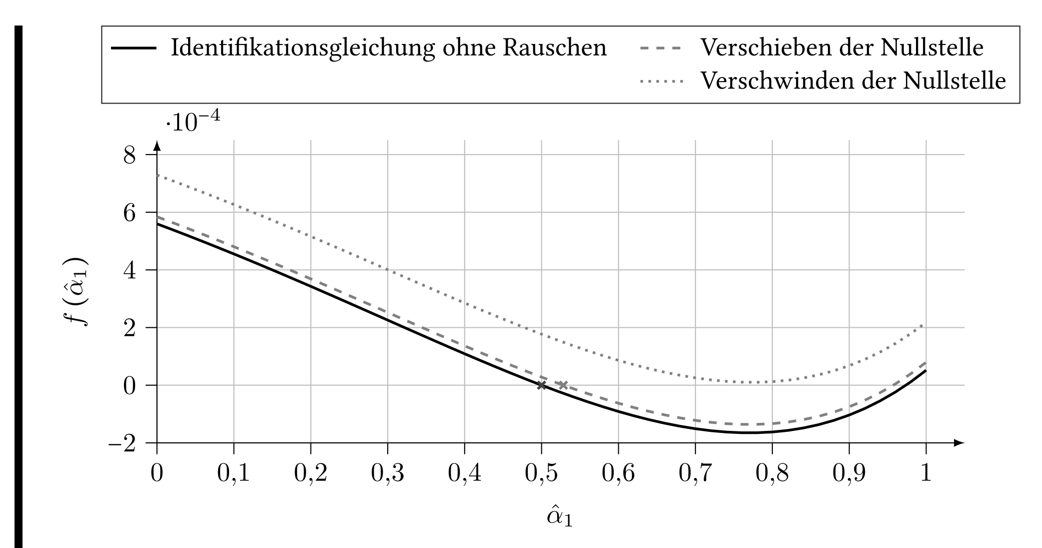


Abbildung 6.9: Illustration der Nullstellenverschiebung der Funktion (6.1), die zur Bestimmung der Ableitungsordnung angewendet wird, aufgrund von einem verrauschten Ausgangssignal

6.1.6 Zusammenfassung und Diskussion der auf dem Nullstellenproblem basierenden Verfahren

In diesem Abschnitt werden zwei Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation vorgestellt. Beide Verfahren basieren auf einer Nullstellensuche der Funktion (6.1), die sich aus der Umstellung der Identifikationsgleichung zur Parameterbestimmung (4.3) ergibt. Dadurch lässt sich wie bei der Parameteridentifikation für die Ableitungsordnungsidentifikation ausnutzen, dass der Einfluss der Initialisierungsfunktion durch eine Modulationsfunktion mit der Eigenschaft $(P4)$ eliminiert wird, falls sich das System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindet.

Die Nullstellensuche wird beim ersten Verfahren mit dem Newton-Verfahren durchgeführt. Für das formulierte Problem (6.8) mit (6.7) und (6.9) konvergiert das Newton-Verfahren, wenn sowohl die Modulationsfunktion, die Parameter und deren Ableitungen als auch das Ein- und Ausgangssignal beschränkt sind (siehe Theorem 6.1). Die Beschränktheit dieser Größen bis auf die Beschränktheit der Parameter und deren Ableitungen kann über die Wahl des Eingangssignals und der Modulationsfunktion aufgrund der Annahme 3.4 sichergestellt werden (siehe Abschnitt 6.1.2), da die Beschränktheit der Parameter und deren Ableitungen abhängig von dem Parameteridentifikationsverfahren sind. Für die LS-Methode wird die Beschränktheit dieser Größen im Abschnitt 6.1.3 untersucht. Bei Anwenden der LS-Methode in Blockverarbeitung lassen sich die Ableitungen der Parameter mit (6.28) und (6.32) explizit berechnen. In diesem Fall lässt sich die Beschränktheit der Parameter auch durch das Eingangssignal und die Modulationsfunktion gewährleisten (siehe Lemma 6.5 und 6.6). Falls hingegen die rekursive LS-Methode zur Parameteridentifikation eingesetzt wird, müssen die Ableitungen der Parameter durch den Differenzenquotienten approximiert werden, die aufgrund der Annahme 3.4 per Definition beschränkt sind. Während die Berechnungsvorschrift der LS-Methode in Blockverarbeitung

in die Funktion (6.1) entsprechend (6.24) eingesetzt werden kann, ist dies für die rekursive LS-Methode nicht möglich. Für die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird daher ein zweistufiges Verfahren vorgeschlagen. Bei diesem Verfahren wird abwechselnd die Parameter- und die Ableitungsordnungsidentifikation ausgeführt (siehe Abbildung 6.2). Zu diesem Verfahren ist anzumerken, dass das Newton-Verfahren nur lokal konvergent ist. Dadurch dass die Funktion (6.1) mehrere Nullstellen besitzen kann (siehe Abschnitt 6.1.1), kann bei ungeeigneter Startwertwahl eine fehlerhafte Bestimmung der Ableitungsordnungen erfolgen, weshalb die Startwertwahl der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ für das Newton-Verfahren ein kritischer Schritt ist.

Während das erste Verfahren eine numerische Lösung der Nullstellen mittels des Newton-Verfahrens bestimmt, approximiert das zweite Verfahren die Funktion (6.1) selbst. Die Approximation erfolgt dabei durch eine kubische Spline-Funktion (siehe Definition 6.3). In jedem Iterationsschritt wird die Funktion (6.1) an den Nullstellen der kubischen Spline-Funktion ausgewertet. Diese Punkte dienen in der nächsten Iteration als weitere Stützstelle, um eine Annäherung der kubischen Spline-Funktion an die Funktion (6.1) zu erzielen. Dadurch konvergieren auch die Nullstellen der kubischen Spline-Funktion gegen die Nullstellen der Funktion (6.1), sodass die Nullstellen der kubischen Spline-Funktion den Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems entsprechen. Für die notwendige Parameteridentifikation wird dieser Ansatz wie das auf dem Newton-Verfahren basierenden Ansatz mit der LS-Methode kombiniert.

Vorteilhaft bei der iterativen Spline-Interpolation gegenüber dem auf dem Newton-Verfahren basierenden Ansatz ist, dass die kubische Spline-Funktion gegen die Identifikationsgleichung konvergiert, wenn die Teilintervalle sehr klein werden, und sämtliche Nullstellen der Funktion (6.1) bestimmt. Damit kann über ein Validierungsschritt die Ableitungsordnung des fraktionalen Systems bestimmt werden. Dahingegen besitzt das auf dem Newton-Verfahren basierender Ansatz lediglich lokale Konvergenz, weshalb die identifizierte Nullstelle von dem gewählten Startwert abhängt. Dadurch kann bei einer ungeeigneten Startwertwahl die Ableitungsordnung fehlerhaft bestimmt werden. Dafür schränkt der Ansatz basierend auf dem Newton-Verfahren im Gegensatz zu der iterativen Spline-Interpolation, die sich nur auf kommensurable fraktionale Systeme anwenden lässt, die Struktur des fraktionalen Systems nicht ein.

Die Kombination der beiden Ansätze zur Ableitungsordnungsidentifikation mit dem Parameteridentifikationsverfahren aus Abschnitt 4.1 resultiert in zwei Verfahren zur gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation. Da beide Verfahren auf dem Modulationsfunktionsverfahren basieren, sind diese nicht auf fraktionale Systeme beschränkt, die zu Beginn der Identifikation in Ruhe sind. Daher stellen beide in dem Abschnitt 6.1.2 und 6.1.4 hergeleiteten Verfahren einen fundamentalen Beitrag zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage dar. Allerdings erfolgt die Herleitung der beiden Verfahren unter der Annahme, dass das Ausgangssignal als unverrauschte Größe vorliegt. Der durch ein verrauschtes Ausgangssignal resultierende Identifikationsfehler wird im Abschnitt 6.1.5 analysiert. Durch den Einfluss des Rauschens verschiebt sich die Lage der Nullstelle, die auch gänzlich verschwinden kann (siehe Abbildung 6.9). Über die vorgebbaren Größen des Modulationsfunktionsverfahrens wie beispielsweise die Modulationsfunktion besteht die Möglichkeit, den Identifikationsfehler zu verringern. Die dafür zu treffenden Maßnahmen führen jedoch auf ein schlecht gestelltes Problem bezogen auf die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation. Um dieses Problem zu vermeiden, werden im Abschnitt 6.2 zwei optimierungsbasierte Verfahren präsentiert.

6.2 Ableitungsordnungsidentifikation als Optimierungsproblem

Im vorherigen Abschnitt 6.1 erfolgte die Herleitung der Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation für ein unverrauschtes Ausgangssignal und erst nachträglich wurde der Rauscheinfluss im Abschnitt 6.1.5 analysiert. In diesem Abschnitt wird bereits bei der Herleitung der Verfahren angenommen, dass das Ausgangssignal y additiv mit Rauschen ε überlagert ist. Wie die beiden Verfahren aus Abschnitt 6.1 wird im Abschnitt 6.2.1 zunächst ein optimierungsbasierter Ansatz basierend auf der Funktion (6.1) präsentiert. Für eine gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird im Abschnitt 6.2.2 der Ansatz analog zum Abschnitt 6.1.3 mit einem Parameteridentifikationsverfahren kombiniert. In diesem Fall wird anstelle der LS-Methode die IV-Methode eingesetzt, damit die Parameter auch in Anwesenheit von Rauschen konsistent bestimmt werden (siehe Abschnitt 4.3). Ein zweiter optimierungsbasierter Ansatz, der im Abschnitt 6.2.3 thematisiert wird, verwendet statt der Funktion (6.1) den Gleichungsfehler zwischen der verrauschten Messung des Ausgangssignals und einem simulierten Ausgangssignal zur Formulierung des notwendigen Gütemaßes.

6.2.1 Optimierungsproblem basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren und Lösungsansatz

Im Abschnitt 6.1.5 wird gezeigt, dass aufgrund des Rauschens die Nullstellen der Funktion (6.1), die den Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems entsprechen, verschwinden können. Damit auch in dem Fall eine Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf der Funktion (6.1) durchführbar ist, wird in diesem Abschnitt anstelle des Nullstellensuchansatz ein optimierungsbasierter Ansatz präsentiert. Dazu wird ein zu minimierendes Gütemaß

$$J_{\mathrm{M}}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) := \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} \tilde{f}_h^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.48}$$

mit $N \geq n+m+2$ aufgestellt, das das Quadrat unabhängiger Gleichungen der Funktion (6.43)

$$\tilde{f}_h\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) := \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \tilde{y}\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \tag{6.49}$$

aufsummiert, die der Funktion (6.1) unter Berücksichtigung eines verrauschten Ausgangssignals $\tilde{y}$ entspricht. Die unabhängigen Gleichungen $\tilde{f}_h$ werden wie bei dem Nullstellensuchproblem im Abschnitt 6.1.2 beispielsweise durch Verschiebung der Integrale um ein Zeitintervall T_Δ erzeugt und in dem Vektor

$$\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[\tilde{f}_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \tilde{f}_N\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top \tag{6.50}$$

zusammengefasst. Zum Lösen des Optimierungsproblems

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J_{\mathrm{M}}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) \tag{6.51}$$

wird das Gauß-Newton-Verfahren [AGLR19, S. 214 ff.] angewendet. Für das formulierte Gütemaß (6.48) mit (6.49) ergibt sich dies zu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{q+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_q - \left[H_{\mathrm{M}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1} \nabla J_{\mathrm{M}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) \tag{6.52}$$

mit dem Gradienten

$$\nabla J_{\mathrm{M}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) := \left[\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right), \ldots, \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{\top} \tag{6.53}$$

und der nach dem Gauß-Newton-Verfahren approximierten Hesse-Matrix

$$H_{\mathrm{M}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) := \begin{bmatrix} \sum\limits_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \sum\limits_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \sum\limits_{h=1}^{N} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \end{bmatrix}. \tag{6.54}$$

Partielle Ableitung des Optimierungsproblems

Die in (6.53) und (6.54) auftretenden partiellen Ableitungen der Funktion $\tilde{f}_h$ (6.43) nach den Ableitungsordnungen sind identisch zu denen, die zum Aufstellen der Jacobi-Matrix (6.9) des Newton-Verfahrens aus Abschnitt 6.1.2 benötigt werden. Folglich sind die partiellen Ableitungen mit der Berechnungsvorschrift (6.12) im Lemma 6.1 bereits gegeben. Der einzige Unterschied ist, dass das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$ (6.42) anstelle des unverrauschten Ausgangssignals y verwendet wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \tilde{y}(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t)\,\mathrm{d}t - \\ \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t)\,\mathrm{d}t + \Psi(j) \end{aligned} \tag{6.55}$$

mit

$$\Psi(j) = \begin{cases} \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \tilde{y}(t) \frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & j \leq n+1 \\ -\hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & \text{sonst} \end{cases}. \tag{6.56}$$

Konvergenzanalyse

Das Gauß-Newton-Verfahren besitzt eine positive definite Hesse-Matrix, sofern die Hesse-Matrix nicht-singulär ist [AGLR19, S. 215]. Daraus folgt direkt, dass das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, falls der Gradient existiert und beschränkt ist. Um dies für das formulierte Gütemaß (6.48) mit (6.49) zu überprüfen, werden die beiden folgenden Annahmen 6.5 und 6.6 getroffen.

Annahme 6.5 (Beschränktheit der Modulationsfunktion und deren Ableitungen für die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens)
Für die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens für das Gütemaß (6.48) *mit* (6.49) *wird angenommen, dass*

(a) die Modulationsfunktion γ,

(b) die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)$ und ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)$ sowie

(c) die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$

beschränkt sind.

Annahme 6.6 (Beschränktheit der partiellen Ableitungen der Parameter für die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens)
Für die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens für das Gütemaß (6.48) *mit* (6.49) *wird angenommen, dass die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ beschränkt ist.*

Basierend auf der partiellen Ableitungen der Funktion $\tilde{f}$ (6.55) und den Annahmen 6.5 und 6.6 erfolgt die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens für die Ableitungsordnungsidentifikation.

Theorem 6.3 (Konvergenz der iterativen Vorschrift des Optimierungsproblems basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren [SPH21])
Sei die iterative Vorschrift (6.52) *des Gauß-Newton-Verfahrens für das Gütemaß mit der Funktion $\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) := [\tilde{f}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \ldots, \tilde{f}_h(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \ldots, \tilde{f}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^\top$ mit $\tilde{f}_h$* (6.49) *gegeben, sei γ eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft $(P4)$ und $N = n + m + 2$.*
Die iterative Vorschrift (6.52) *des Gauß-Newton-Verfahrens konvergiert für die Funktion $\tilde{\boldsymbol{f}}$* (6.49), *wenn die Annahmen 6.5 und 6.6 erfüllt sind.*

Beweis:
Damit das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, muss nach [AGLR19, S. 215] der Gradient (6.53) existieren und darf keine Singularität aufweisen. Dieses ist genau dann der Fall, wenn die partielle Ableitung der Funktion $\tilde{\boldsymbol{f}}$ nach den Ableitungsordnungen (6.55) keine Singularität besitzt. Die Abschätzung der partielle Ableitung (6.55) erfolgt analog zum Beweis des Theorems 6.1. Dadurch ergibt sich

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\right| = \sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\partial \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |\tilde{y}(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)\right|^2 \mathrm{d}t} - \sum_{k=0}^{m}\left|\frac{\partial \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)\right|^2 \mathrm{d}t} + |\Psi(j)| \tag{6.57}$$

mit

$$|\Psi(j)| = \begin{cases} \left|\hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |\tilde{y}(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)}{\partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & j \leq n+1 \\ \left|\hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)}{\partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & \text{sonst} \end{cases} . \tag{6.58}$$

Aus (6.57) und (6.58) leiten sich die Bedingungen für die Beschränktheit der partielle Ableitung (6.55) ab. Die partielle Ableitung (6.55) ist genau dann beschränkt, wenn

(a) das Eingangssignal u,

(b) das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$,

(c) die Parameter $\hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ und $\hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$,

(d) die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / \partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / \partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$,

(e) die Modulationsfunktion γ,

(f) die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)$ und ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)$ sowie

(g) die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t) / \partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial\, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t) / \partial \{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$

beschränkt sind.

Aufgrund der Annahme 3.4, dass das Ein- und Ausgangssignal stets beschränkt sind, sind die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Aus dieser folgt auch, dass alle Parameter beschränkt sein müssen und somit die Bedingung (c) erfüllt wird. Ansonsten ist die Unbeschränktheit des Ausgangssignals trotz eines beschränkten Eingangssignals nicht gewährleistet. Das bedeutet, dass das Gauß-Newton-Verfahren für das Optimierungsproblem (6.52) konvergiert, wenn die übrigen Bedingungen (d) – (g) erfüllt werden. Dies wird durch die Annahmen 6.5 und 6.6 sicher gestellt. □

Bezüglich der Modulationsfunktion treten die gleichen Bedingungen wie in dem Beweis zur Konvergenz des Newton-Verfahrens im Abschnitt 6.1.2 auf, sodass auch die gleichen Schlussfolgerungen gelten. Die in der Annahme 6.5 auftretenden Größen betreffen die Wahl der

Modulationsfunktion und somit die Bedingungen (e) – (g). Die Bedingungen (e) und (f) können direkt durch die Wahl einer beschränkten Modulationsfunktion γ sichergestellt werden. Damit die erste partielle Ableitung der Grünwald-Letnikov-Definition (3.37) keine Singularität aufweist und somit beschränkt ist, muss auch in diesem Fall eine von Null verschiedene Abtastzeit gewählt werden. Dies erfüllt die Bedingung (g). Eine Aussage bezüglich der partiellen Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen und somit bezüglich der Annahme 6.6 beziehungsweise der Bedingung (d) hängt nach den Ergebnissen im Abschnitt 4.1 und 6.1.3 von der gewählten Methode zur Parameteridentifikation ab und wird im folgenden Abschnitt 6.2.2 untersucht.

Zur Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens ist weiterhin anzumerken, dass dieses nur für konvexe Gütemaße stets gegen das globale Minimum konvergiert. Im Allgemeinen kann die Konvergenz gegen das globale Minimum nicht garantiert werden, da das Verfahren auf einer linearen Approximation des eigentlichen Problems aufbaut. Vielmehr hängt das Minimum, gegen das das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, von den gewählten Startwerten und den Nichtlinearitäten ab, die im eigentlichen Problem auftreten [AGLR19, S. 214 ff.].

Konvexitätsanalyse

Nachfolgend wird anhand eines Beispiels die Konvexität des formulierten Problems (6.48) mit (6.49) untersucht, die zum einen von den auftretenden Nichtlinearitäten abhängt. Zum anderen besitzt sowohl das das Ein- und Ausgangssignal als auch die verwendete Modulationsfunktionsverfahren einen Einfluss auf die Konvexität.

Beispiel 6.5:
Dass das Gütemaß (6.48) *mit* (6.49) *nicht konvex werden kann, wird in diesem Beispiel veranschaulicht. Dafür wird das fraktionale System*

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}GL_t^{\alpha_1} y(t) + 10y(t) = u(t) \tag{6.59}$$

mit der Ableitungsordnung $\alpha_1 = 0{,}5$ *und dem in der Abbildung 6.10 angegebenen Ein- und Ausgangssignal verwendet. Der in Abbildung 6.11 dargestellte Verlauf ergibt sich durch die Evaluierung des Gütemaßes* (6.48) *im Bereich* $\hat{\alpha}_1 \in [0, 1]$ *mit einer Schrittweite von* $\Delta_\alpha = 0{,}01$*, wenn eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit* $s = 10$ *und* $o = 5$ *eingesetzt wird. Aus der Abbildung 6.11 folgt aus den zwei auftretenden Minima direkt [ABH+ 13, S. 580 ff.], dass für das Ein- und Ausgangssignal (siehe Abbildung 6.10) das Gütemaß* (6.48) *nicht konvex ist.*

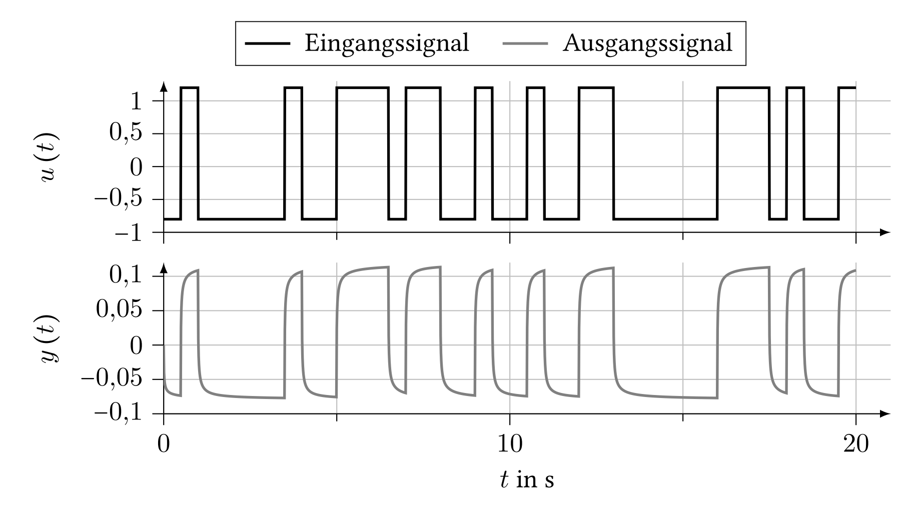


Abbildung 6.10: Pseudozufallsrauschen als Eingangssignal (oben) und das resultierende und Ausgangssignal (unten) für die Konvexitätsbetrachtung des Gütemaßes (6.48)

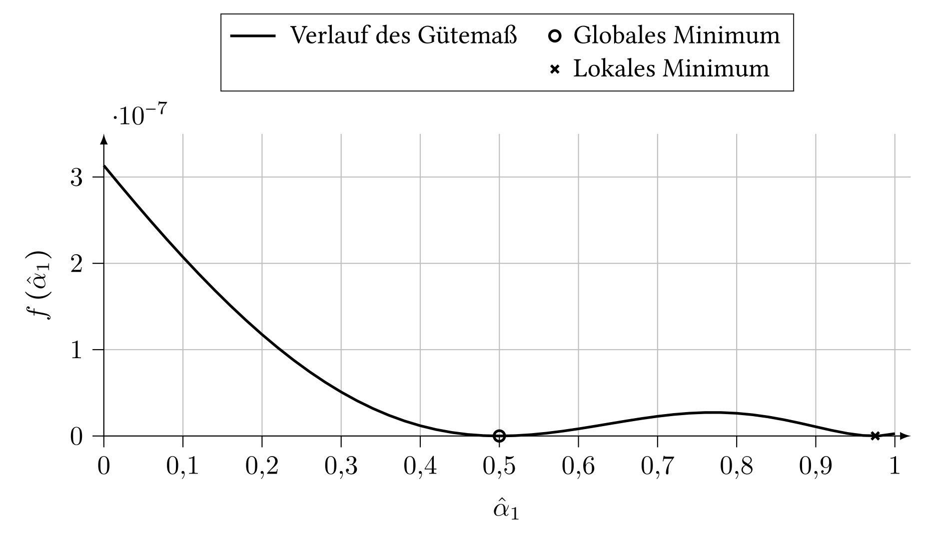


Abbildung 6.11: Illustration des Gütemaßverlaufs (6.48) des einfachen Beispielsystems (6.5) mit den Ein- und Ausgangssignal aus Abbildung 6.10 bei einer Auswertung an einer Vielzahl an Funktionsstellen im Bereich $\hat{\alpha}_1 \in [0, 1]$

Anhand des Beispiels ist gezeigt, dass das formulierte Problem (6.48) mit (6.49) ein nicht-konvexes Gütemaß ist. Damit hängt das gefundene Minimum wie die bestimmte Nullstelle bei dem Newton-Verfahren (siehe Abschnitt 6.1.2) von dem gewählten Startwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ab.

6.2.2 Kombination des Optimierungsproblems zur Ableitungsordnungsidentifikation und der Parameteridentifikation mittels der IV-Methode

Zur Evaluierung der für das Gauß-Newton-Verfahren notwendigen Funktion (6.49) und deren partiellen Ableitung (6.55) werden sowohl die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ als auch die partiellen Ableitungen der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ benötigt. Da das Ausgangssignal als eine verrauschte Messgröße $\tilde{y}$ vorliegt, führt die Parameteridentifikation mit Hilfe der LS-Methode auch für die Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$ des fraktionalen Systems zu fehlerhaften Identifikationsergebnissen (siehe Abschnitt 4.3.1). Um trotz des verrauschten Ausgangssignals eine konsistente Parameterschätzung zu erhalten, wird die IV-Methode aus Abschnitt 4.3 anstelle der LS-Methode eingesetzt.

Mit der IV-Methode ist die Parameteridentifikation für das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$:

$$\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) = \left[\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1}\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right). \tag{6.60}$$

Dabei entspricht $\boldsymbol{W}^\top$ der Matrix der Hilfsvariablen, die in Definition 4.2 angegeben sind. Zum Aufstellen der Hilfsvariablen wird eine Schätzung y_s des ungestörten Ausgangssignal y des fraktionalen Systems benötigt, wofür die Rechenvorschrift (5.3) verwendet werden kann .

Partielle Ableitung der Parameter

Analog zur Berechnungsvorschrift mit rauschfreien Messungen lassen sich die notwendigen partiellen Ableitungen der Parameter durch Differentiation von (6.60) nach den Ableitungsordnungen bestimmen.

Lemma 6.10 (Partielle Ableitung der Parameter nach der Ableitungsordnung bei verrauschtem Ausgangssignal)
Sei $t, t_0, t_1, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 \leq t_{a,h} < t_{e,h}$, γ eine Modulationsfunktion mit der zusätzlichen Eigenschaft $(P4)$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\, t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i}\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\, t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k}u(t) \tag{6.61}$$

die FDGL, $\boldsymbol{p} = [a_{n-1}, \ldots, b_0]$, $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_n, \ldots, \beta_0]$, $\tilde{y}$ das mit Rauschen ε überlagerte Ausgangssignal y des fraktionalen Systems, $N_p \geq n + m + 1$, $N_\theta = n + m + 2$, $q \in \mathbb{N}_0$ der aktuelle Iterationsschritt von (6.8)*, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq N_p\}$, $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{J} := \{j \in \mathbb{N} | j \leq N_\theta\}$, $j \in \mathcal{J}$, $\boldsymbol{W}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left[\boldsymbol{w}_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{w}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{w}_{N_p}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top$ die Matrix der Hilfsvariablen mit*

$$\boldsymbol{w}_h^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n-1}}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \right. \\ \left. \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right] \tag{6.62}$$

entsprechend Definition 4.2, $\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left[\boldsymbol{m}_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{m}_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \ldots, \boldsymbol{m}_{N_p}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top$ *die Messmatrix mit*

$$\boldsymbol{m}_h^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n-1}}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t, \right. \\ \left. \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t,\ \ldots,\ \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right] \tag{6.63}$$

und $\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \left[z_1\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \ldots,\ z_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),\ \ldots,\ z_{N_p}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^\top$ *der Messvektor mit*

$$z_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) := \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right) {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \tag{6.64}$$

entsprechend Lemma 4.3. Ferner beschreibt $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *das* j*-te Element des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$*. Der Übersichtlichkeit wegen wird der Index des Iterationsschritts* q *in diesem Lemma und im zugehörigen Beweis nicht aufgeführt.*
Die partielle Ableitung der Parameter bezüglich des j*-ten Elements des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *berechnet sich zu*

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \left[\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}\left[\frac{\partial \boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial \boldsymbol{z}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \right. \\ \left. \frac{\partial \boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) - \boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right], \tag{6.65}$$

wenn die Parameteridentifikation mit der IV-Methode (6.60) *erfolgt.*

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 6.3. Der Unterschied ist, dass im ersten Schritt das für die Parameteridentifikation aufgestellte Gleichungssystem

$$\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.66}$$

mit der transponierten Matrix der Hilfsvariablen $\boldsymbol{W}$ von links multipliziert wird

$$\boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{6.67}$$

Anschließend erfolgt die partielle Ableitung nach den Ableitungsordnungen unter Berücksichtigung der Produktregel, worauf die Umstellung nach der gesuchten Größe $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ folgt. □

Beschränktheit der partiellen Ableitung

Aus der Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahren für das Gütemaß (6.48) geht hervor, dass die partielle Ableitung der Parameter $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ für die Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens beschränkt sein müssen.

Lemma 6.11 (Beschränktheit der partiellen Ableitung der Parameter bei verrauschtem Ausgangssignal)
Seien die gleichen Notationen und Größen wie im Lemma 6.10 gegeben. Ferner beschreibt $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,j)}$ *das* (h,j)*-te Element und* $\{\boldsymbol{M}\}_{(h,:)}$ *die* h*-te Zeile der Matrix* $\boldsymbol{M}$*.*
Die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \left[\boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}\Bigg[&\frac{\partial\boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \boldsymbol{W}^{\top}\left(\boldsymbol{\theta}_q\right)\frac{\partial\boldsymbol{z}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \\ &\frac{\partial\boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) - \boldsymbol{W}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{6.68}$$

entsprechend Lemma 6.10 ist beschränkt, wenn die Abtastzeit endlich ist und das Ein- und Ausgangssignal, das simulierte Ausgangssignal sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind.

Beweis:
Der zugehörige Beweis wird im Anhang C.7 erbracht. □

Aufgrund der Annahme 3.4 ist sowohl das Ein- und Ausgangssignal beschränkt. Ebenfalls sichert die Annahme 3.4, dass das mit (5.3) berechnete Ausgangssignal beschränkt ist. Damit sind die partiellen Ableitungen der Parameter nach den Ableitungsordnungen bei Anwendung der IV-Methode in Blockverarbeitung (4.91) beschränkt, wenn die Abtastzeit endlich ist und eine beschränkte Modulationsfunktion gewählt wird. In diesem Fall konvergiert das Gauß-Newton-Verfahrens für das im Abschnitt 6.2.1 formulierte Optimierungsproblem (6.51).

Praktische Umsetzung

Der Nachteil der LS-Methode in Blockverarbeitung, dass für die Parameteridentifikation zunächst sämtliche Identifikationsgleichungen gespeichert werden müssen, bevor die Identifikation stattfinden kann, bleiben bei der IV-Methode in Blockverarbeitung bestehen [IM11, S. 269]. Beim Einsatz der weniger rechenintensiven und echtzeitfähigen rekursiven IV-Methode aus Lemma 4.17 muss die partielle Ableitung der Parameter (6.65) ebenfalls wie im Abschnitt 6.1.3 approximiert werden. Der Differenzenquotient zur Approximation ist mit der Definition 6.1 angegeben und muss für das Gauß-Newton-Verfahren nach dem Theorem 6.3 beschränkt sein. Entsprechend der Definition 6.1 ist dies der Fall, wenn die identifizierten Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ beschränkt sind. Da die Parameter aufgrund der Annahme 3.4 beschränkt sind, konvergiert das Gauß-Newton-Verfahren (6.52) für das formulierte Gütemaß (6.48) mit (6.49) auch bei Anwendung der rekursiven IV-Methode und dem Differenzenquotienten (6.34). Da die Parameter in der Identifikationsgleichung (6.49) nicht mehr wie in (6.24) ersetzen werden können, müssen die Parameter und Ableitungsordnungen mittels eines zweistufigen Verfahrens identifiziert werden. Zwei mögliche Vorgehensweise sind in der Abbildung 6.2 im Abschnitt 6.1.3 angegeben.

Durch das iterative Verfahren (6.53) in Kombination mit der IV-Methode (6.60) wird ein Verfahren zur gemeinsamen Ableitungsordnungs- und Parameterbestimmung beschrieben, das verrauschte Ausgangsmessungen zulässt. Aufgrund der Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens ist auch eine Identifikation möglich, wenn sich das fraktionale System nicht in Ruhe befindet, sofern die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ erfüllt. Die Kombination der beiden Verfahren stellt somit eine Antwort auf die zweite Forschungsfrage unter Berücksichtigung der beiden formulierten Anforderungen dar.

6.2.3 Optimierungsproblem basierend auf dem Gleichungsfehler und Lösungsansatz

Die bisherigen Verfahren zur Ableitungsordnungsbestimmung basieren auf dem Modulationsfunktionsverfahren. In diesem Abschnitt wird ein weiterer Ansatz zur Identifikation der Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems beschrieben, die auf dem Gleichungsfehler zwischen dem verrauschten Ausgangssignal $\tilde{y}$ des fraktionalen Systems und einem simulierten Ausgangssignal y_s basiert.

Analog zur Parameteridentifikation von ganzzahligen Systemen [IM11, S. 225 f.] wird das Gütemaß

$$J_{\mathrm{Y}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{N} e_h^2 \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.69}$$

mit $N \geq n + m + 2$ und dem Gleichungsfehler

$$e_h \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \tilde{y} \left(\tilde{t}_h\right) - y_s \left(\tilde{t}_h\right), \tag{6.70}$$

der die Differenz zwischen dem verrauschten Ausgangssignal des Systems $\tilde{y}$ und dem simulierten Ausgangssignal y_s an den Zeitpunkten $\tilde{t}_h$ beschreibt, zur Bestimmung der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}} := \left[\hat{\alpha}_n, \ldots, \hat{\beta}_0\right]^\top$ definiert. Da das Verfahren auch für Systeme gültig sein soll,

die sich zu Identifikationsbeginn nicht in Ruhe befinden, wird die in Lemma 5.1 präsentierte geschlossene Lösung für FDGLen zur Berechnung des simulierten Ausgangssignals $y_s = y_{\mathrm{smp}}$ angewendet. Abhängig der gewählten Speicherlänge des SMPs L beginnt die Berechnung des Simulationssignals ab $t_2 = t_1 + LT$ mit der Abtastzeit T, wobei t_1 den Beginn der Messung markiert. Die Zeitpunkte $\tilde{t}_h$, an denen der Gleichungsfehler berechnet wird, ergeben sich zu $\tilde{t}_h = t_2 + T_{\Delta,h}$ mit den wählbaren Zeitabständen $T_{\Delta,h} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wie bei dem optimierungsbasierten Ansatz im Abschnitt 6.2.1 werden die Ableitungsordnungen durch das Minimieren des Gütemaßes (6.69) bezüglich der Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J_{\mathrm{Y}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.71}$$

bestimmt, wofür ebenfalls das Gauß-Newton-Verfahren [AGLR19, S. 214 ff.]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{q+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_q - \left[H_{\mathrm{Y}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{-1} \nabla J_{\mathrm{Y}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) \tag{6.72}$$

mit dem Gradienten

$$\nabla J_{\mathrm{Y}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) := \left[\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right), \ldots, \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\right]^{\mathsf{T}} \tag{6.73}$$

und der nach dem Gauß-Newton-Verfahren approximierten Hesse-Matrix

$$H_{\mathrm{Y}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) := \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\alpha}_n} & \cdots & \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)}{\partial \hat{\beta}_0} \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

eingesetzt wird.

Partielle Ableitung des Gleichungsfehlers

Die partielle Ableitung des Gleichungsfehlers (6.70) nach den Ableitungsordnungen bildet die Grundlage für die Berechnung des Gradienten (6.73) sowie der Hesse-Matrix (6.74).

Lemma 6.12 (Partielle Ableitung des Gleichungsfehlers Lösung nach den Ableitungsordnungen)
Sei $L \in \mathbb{N}_0$ die Speicherlänge des SMPs, $t, t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 = t_1 + LT$, $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$, $T \in \mathbb{R}_{>0}$ die Abtastzeit, $L_1 := \min\left(\lfloor \frac{t-t_1-LT}{T} \rfloor, L\right)$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} \tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_{k\,t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t) \tag{6.75}$$

die FDGL, $\boldsymbol{p} = [a_{n-1}, \ldots, b_0]$, $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_n, \ldots, \beta_0]$, $N = n + m + 2$, $\mathcal{J} := \{ j \in \mathbb{N} | j \leq N\}$, $j \in \mathcal{J}$ und e_h der Gleichungsfehler des Optimierungsproblems (6.70)

$$e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \tilde{y}\left(\tilde{t}_h\right) - y_s\left(\tilde{t}_h\right)$$

mit dem verrauschten Ausgangssignal des zu identifizierenden Systems $\tilde{y}$ und dem nach (5.3) *berechneten Ausgangssignal y_{smp}. Ferner beschreibt $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ das j-te Element des Ableitungsordnungsvektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.*
Die partielle Ableitung des Gleichungsfehlers e_h bezogen auf $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = \lim_{T\to 0}&\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{T^{\hat{\alpha}_i}}\frac{\partial\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} + \Psi\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right) y_{\mathrm{smp}}(t) - \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}}\cdot \\
&\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\frac{1}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{N-k}}}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{N-k}}{l}u(t-lT) - \right. \\
&\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\frac{1}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}\left(\sum_{l=1}^{L_1}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l}y_{\mathrm{smp}}(t-lT) + \right. \\
&\left.\left.\sum_{l=L_1+1}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l}\tilde{y}(t-lT)\right) + \Omega\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6.76}
$$

mit

$$
\Psi\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right) = \begin{cases} -\dfrac{\hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\ln(T)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} & j \leq n+1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases},
\tag{6.77}
$$

und

$$
\Omega\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right) = \begin{cases}
\begin{aligned}
-\hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)&\left(\frac{\ln(T)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}}\sum_{l=1}^{L_1}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}y_{\mathrm{smp}}(t-lT) + \right. \\
&\sum_{l=1}^{L_1}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda}y_{\mathrm{smp}}(t-lT) + \\
&\frac{\ln(T)}{T^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}}\sum_{l=L_1+1}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\tilde{y}(t-lT) + \\
&\left.\sum_{l=L_1+1}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda}\tilde{y}(t-lT)\right)
\end{aligned} & j \leq n+1 \\
\begin{aligned}
\hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)&\left(\frac{\ln(T)}{T^{\hat{\beta}_{N-j}}}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}u(t-lT) + \right. \\
&\left.\sum_{l=0}^{L}(-1)^l\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda}u(t-lT)\right)
\end{aligned} & \textit{sonst}
\end{cases}.
\tag{6.78}
$$

Beweis:
Aus der Definition des Gleichungsfehlers (6.70) ergibt sich die allgemeine partielle Ableitung nach der Ableitungsordnung $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ zu

$$e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \tilde{y}(t) - y_{\text{smp}}(t) \tag{6.79}$$

$$\frac{\partial e_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} = -\frac{\partial y_{\text{smp}}(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}. \tag{6.80}$$

Im Gegensatz zu der berechneten Ausgangsgröße y_{smp} ändert sich die Ausgangsgröße $\tilde{y}$ des fraktionalen Systems bei Variation der Ableitungsordnungen im Gleichungsfehler des Optimierungsproblems (6.70) nicht. Das simulierte Ausgangssignal y_{smp} wird hingegen durch die Rechenvorschrift (5.3) unter Berücksichtigung, dass die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ entsprechend Abschnitt 6.1.1 von den Ableitungsordnungen abhängt, beschrieben. Die Rechenvorschrift (5.3) ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} y_{\text{smp}}(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} \Bigg[& \sum_{k=0}^{m} \frac{\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\hat{\beta}_k}} \sum_{l=0}^{L} (-1)^l \binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{N-k}}{l} u(t-lT) - \\ & \sum_{i=0}^{n} \frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}} \left(\sum_{l=1}^{L_1} (-1)^l \binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l} y_{\text{smp}}(t-lT) + \right. \\ & \left. \sum_{l=L_1+1}^{L} (-1)^l \binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l} \tilde{y}(t-lT) \right) \Bigg] \end{aligned} . \tag{6.81}$$

Aus (6.81) geht hervor, dass mehrere Abhängigkeiten von der Ableitungsordnung als Produkt vorkommen. Daher wird die Produktregel zur Berechnung der partiellen Ableitung des Gleichungsfehlers angewendet. Für die Bestimmung der partiellen Ableitungen der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial\hat{\boldsymbol{p}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ wird auf die Ergebnisse im Abschnitt 6.1.3 für den rauschfreien Fall und auf die Ergebnisse im Abschnitt 6.2.2 für verrauschte Messungen des Ausgangssignals zurückgegriffen. Die einzelnen Summen innerhalb der eckigen Klammern in (6.81) entsprechen von der Struktur her dem Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov. Die partielle Ableitung des Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov ist im Lemma 3.5 angegeben. Dabei ist anzumerken, dass im Hilfsvektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ die Ableitungsordnungen sowohl des Ein- als auch des Ausgangssignals zusammengefasst sind. Daher muss in Abhängigkeit des ausgewählten Elements $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ eine Fallunterscheidung getroffen werden, die in (6.78) angegeben ist.

Es bleibt noch der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} = \frac{\partial}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \left(\sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) T^{-\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}} \right)^{-1}, \tag{6.82}$$

der der eckigen Klammer in (6.81) vorangestellt ist, zu evaluieren. Bei der Evaluierung ist ebenfalls eine Fallunterscheidung vorzunehmen, da $T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}$ nur von den Ableitungsordnungen

α_i des Ausgangssignals abhängt, während die Parameter von allen Ableitungsordnungen α_i und β_k abhängen. Unter Zuhilfenahme der Ketten- und Produktregel ergibt sich für die ersten $n+1$ Elemente

$$\frac{\partial}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\left(\sum_{i=0}^{n}\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)T^{-\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}\right)^{-1} = -\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{T^{\hat{\alpha}_i}}\frac{\partial\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}\right)^2} + \frac{\hat{a}_{n-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\ln\left(T\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}\right)^2}. \tag{6.83}$$

Für die restlichen Elemente des Hilfsvektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ entfällt der zweite Term, da diese die Ableitungsordnungen des Eingangs beschreiben. Diese Fallunterscheidung ist in (6.77) zusammengefasst. □

Falls das System zu Beginn der Identifikation in Ruhe ist, ist der Beginn der Simulation gleich dem Beginn der Messung $t_2 = t_1$. Demnach verschwinden alle Ausdrücke in (6.76) – (6.78), die abhängig von dem Ausgangssignal $\tilde{y}$ sind.

Konvergenzanalyse

Damit das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, gilt allgemein, dass die zum Problem zugehörige Hesse-Matrix regulär sein muss [AGLR19, S. 215]. Wie beim vorherigen Ansatz im Abschnitt 6.2.2 folgt direkt, dass der Gradient (6.73) für die Konvergenz existieren und beschränkt sein muss. Für die Konvergenzanalyse wird die Annahme 6.7 getroffen.

Annahme 6.7 (Beschränktheit der partiellen Ableitungen der Parameter für die Konvergenzanalyse basierend auf dem Gleichungsfehler)

Für die Konvergenzanalyse des Gauß-Newton-Verfahrens für das formulierte Optimierungsproblem (6.71) *wird angenommen, dass die erste partielle Ableitung der Parameter* $\partial\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *und* $\partial\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)/\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *beschränkt ist.*

Theorem 6.4 (Konvergenz der iterativen Vorschrift des Optimierungsproblems basierend auf dem Gleichungsfehler)

Sei die iterative Vorschrift (6.72) *des Gauß-Newton-Verfahrens für das Gütemaß mit dem Gleichungsfehler* e_h (6.70) *gegeben und sei* $N = n + m + 2$.

Die iterative Vorschrift (6.72) *des Gauß-Newton-Verfahrens konvergiert für den Gleichungsfehler* e_h (6.70), *wenn die Abtastzeit* T *und Annahme 6.7 erfüllt ist.*

Beweis:

Die Konvergenz für das Gauß-Newton-Verfahren für das formulierte Gütemaß (6.69) mit dem Gleichungsfehler e_h (6.70) erfolgt, sofern der Gradient (6.73) keine Singularität aufweist [AGLR19, S. 215]. Folglich darf die partielle Ableitung des Gleichungsfehlers (6.76) keine Singularität besitzen. Die Abschätzung der partielle Ableitung (6.76) erfolgt analog zum Beweis des Theorems 6.1, die der Übersicht halber im Anhang C.8 angegeben ist. Mit dieser Abschätzung (C.39) lassen sich die Bedingungen für die Beschränktheit der partielle Ableitung (6.76) direkt ableiten. Die partielle Ableitung (6.76) ist genau dann beschränkt, wenn

(a) die Abtastzeit T und
(b) die Summe $\sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / T^{\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_{n+1-i}}$

von Null verschieden ist und

(c) das Eingangssignal u,
(d) das verrauschte Ausgangssignal $\tilde{y}$,
(e) das simulierte Ausgangssignal y_{smp},
(f) die Parameter $\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ und $\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ und
(g) die partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ und $\partial \hat{b}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$

beschränkt ist.

Aufgrund der Annahme 3.4, dass das Ein- und Ausgangssignal stets begrenzt sind, sind die Bedingungen (c) und (d) erfüllt. Aus dieser folgt auch, dass alle Parameter beschränkt sein müssen und somit die Bedingung (f) erfüllt wird. Ansonsten ist die Unbeschränktheit des Ausgangssignals trotz eines beschränkten Eingangssignal nicht gewährleistet. Weiterhin folgt aus der Annahme 3.4, dass die Summe $\sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / T^{\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_{n+1-i}}$ von Null verschieden sein muss und somit die Bedingung (b) erfüllt wird. Falls die Summe Null wäre, würde das Ausgangssignal $\tilde{y}$ nach der geschlossenen Lösung (3.50) mindestens für $l = 0$ unbeschränkt sein. Zudem geht aus der geschlossenen Lösung mit dem SMP (5.3) direkt hervor, dass das simulierte Ausgangssignal y_{smp} für beschränkte Ein- und Ausgangssignale und Parameter sowie einer von Null verschiedenen Abtastzeit ebenfalls beschränkt ist. Das bedeutet, dass das Gauß-Newton-Verfahren für das Optimierungsproblem basierend auf dem Gleichungsfehler (6.72) konvergiert, wenn die übrigen Bedingungen (a) und (g) erfüllt werden. □

Mit Blick auf die Implementierung des Verfahrens (6.72) auf einem Digitalrechner wird die Bedingung (a) zwangsweise erfüllt. Die Bedingung (g) wird für den Beweis durch die Annahme 6.7 gesichert und hängt nach den Ergebnissen im Abschnitt 6.1.3 und 6.2.2 von der gewählten Methode zur Parameteridentifikation ab.

Kombination des Ansatzes basierend auf dem Gleichungsfehlers und der Parameteridentifikation mittels der IV-Methode

Zur Evaluierung des Gleichungsfehlers (6.70) werden die ableitungsordnungsabhängigen Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ benötigt. Aus diesem Grund muss der bis hierhin beschriebene Ansatz zur Ableitungsordnungsidentifikation mit einem Parameteridentifikationsverfahren kombiniert werden. Wenn zur Bestimmung der Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ wie im Abschnitt 6.2.2 die IV-Methode eingesetzt wird, bleiben die in dem Abschnitt getroffenen Aussagen gültig. Für die Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens im Theorem 6.4 wird die Beschränktheit der partiellen Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial \hat{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) / \partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j$ über die Annahme 6.7 sichergestellt. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 6.2.2 folgt, dass diese dann beschränkt sind, wenn die Abtastzeit endlich ist und das Ein- und Ausgangssignal, das simulierte Ausgangssignal sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind.

Für die praktische Umsetzung kann auch die weniger rechenintensive und echtzeitfähige rekursive IV-Methode aus Lemma 4.17 anstelle der Blockverarbeitung eingesetzt werden [IM11, S. 269]. Bei Anwendung der rekursiven IV-Methode lassen sich die partiellen Ableitungen der Parameter mittels dem Differenzenquotienten in Definition 6.1 approximieren, deren Beschränktheit durch die Annahme 3.4 gesichert wird. Allerdings gilt, wie es im Abschnitt 6.2.1 angegeben ist, dass das Gauß-Newton-Verfahren nicht automatisch gegen das globale Minimum konvergiert, sondern das Minimum von den gewählten Startwerten $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ und den im eigentlichen Problem auftretenden Nichtlinearitäten abhängt [AGLR19, S. 214 ff.]. Weiterhin ist ein Ersetzen der Parameter im Gleichungsfehler (6.70) durch eine Berechnungsvorschrift entsprechend (6.24) bei Anwendung der rekursiven IV-Methode zur Parameterbestimmung nicht möglich. In diesem Fall ist eine getrennte Ausführung der Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation notwendig. Zwei mögliche Vorgehensweise sind in der Abbildung 6.2 im Abschnitt 6.1.3 dargestellt.

Einfluss des Simulationsfehlers der geschlossenen Lösung auf das Gütemaß

In der Praxis ist üblicherweise nicht die gesamte Systemhistorie des Ein- und Ausgangssignals u und y bekannt, falls das System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe ist. Daher wird zur Berechnung des simulierten Ausgangssignals y_{smp}, das zum Aufstellen des Gleichungsfehlers e_h (6.70) benötigt wird, die geschlossene Lösung unter Berücksichtigung des SMPs (5.3) verwendet. Allerdings ergibt sich durch Vernachlässigung eines Teils der Historie der Gleichungsfehler e_{smp} (5.6), sodass das simulierte Ausgangssignal y_{smp} selbst im unverrauschten Fall nicht exakt dem Ausgangssignal y des fraktionalen Systems entspricht. Im Gütemaß (6.69) geht dieser Gleichungsfehler e_{smp} daher mit ein, sodass die exakten Ableitungsordnungen $\boldsymbol{\theta}$ und Parameter $\boldsymbol{p}$ des fraktionalen Systems das Gütemaß (6.69) im Allgemeinen nicht minimieren.

Die Aussage, dass durch Vernachlässigung eines Teils der Historie das Gütemaß nicht durch die zum System gehörigen Parameter und Ableitungsordnungen minimiert wird, soll im Nachfolgenden plausibilisiert werden. Für die bessere Nachvollziehbarkeit wird die Plausibilisierung für den Eingangsparameter b_0 durchgeführt und dazu angenommen, dass alle anderen Parameter a_i, α_i mit $i = 0, 1, \ldots, n$ und b_k, β_k mit $k = 1, 2, \ldots, m$ das Gütemaß nicht weiter verbessern können. Unter der Annahme, dass das System vor dem Zeitpunkt t_0 in Ruhe war, stellt der Gleichungsfehler $e_{\text{his},h}$ unter Berücksichtigung der gesamten Historie

$$\begin{aligned}e_{\text{his},h}\left(\hat{b}_0\right) = e_h\left(\boldsymbol{\theta}\right) - \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i(\boldsymbol{\theta})}{T^{\alpha_i}}} \Bigg[&\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{T^{\beta_k}} \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_k}{l} u\left(t-lT\right) - \\ &\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{T^{\alpha_i}} \left(\sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} y\left(t-lT\right) + \right. \\ &\left. \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{t-t_2}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha_i}{l} \left(y\left(t-lT\right) - y_{\text{smp}}\left(t-lT\right)\right) \right) \Bigg]\end{aligned} \tag{6.84}$$

den Ausgangspunkt dar, wobei e_h der im Gütemaß (6.69) berücksichtigte Gleichungsfehler ist. Die Signale im Zeitintervall $[t_0, t_1)$ sind im Allgemeinen für die Identifikation unbekannt. Der Gleichungsfehler der gesamten Historie wird für die weiteren Untersuchungen in einen von $\hat{b}_0$ abhängigen und einen von $\hat{b}_0$ nicht abhängigen Teil $\tilde{e}_{\text{his},h}$

$$e_{\text{his},h}\left(\hat{b}_0\right) = \tilde{e}_{\text{his},h} - \frac{\hat{b}_0\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{T^{\beta_0}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i(\boldsymbol{\theta})}{T^{\alpha_i}}} \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_0}{l} u\left(t - lT\right) \tag{6.85}$$

unterteilt. Als nächster Schritt wird für die Plausibilisierung das Gütemaß

$$J\left(\hat{b}_0\right) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{q} e^2_{\text{his},h}\left(\hat{b}_0\right) \tag{6.86}$$

aufgestellt. Es wird ein vom eigentlichen Eingangsparameter b_0 abweichender Parameter $\hat{b}_0$ gesucht, sodass $J\left(\hat{b}_0\right) < J\left(b_0\right)$ gilt. Wenn ein solcher Parameter existiert ist die Aussage, dass durch Vernachlässigung eines Teils der Historie das Gütemaß nicht durch die zum System gehörigen Parameter minimiert wird, bestätigt. Dafür wird folgende Fallunterscheidung getroffen:

1. $\frac{1}{T^{\beta_0}} \sum\limits_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_0}{l} u\left(t - lT\right) = 0$,
2. $\frac{1}{T^{\beta_0}} \sum\limits_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_0}{l} u\left(t - lT\right) < 0$ und
3. $\frac{1}{T^{\beta_0}} \sum\limits_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor} (-1)^l \binom{\beta_0}{l} u\left(t - lT\right) > 0$.

Im ersten Fall ist der Einfluss der Historie gerade Null, sodass unabhängig der Berücksichtigung das Simulationssignal dem Ausgangssignal entspricht. Aus praktischer Sicht wird dieses nur gegeben sein, wenn das System vor dem Beginn der Messungen t_1 in Ruhe war. Wenn diese Situation gegeben ist, wird der Parameter richtig bestimmt und es gilt $\hat{b}_0 = b_0$. Beim zweiten und dritten Fall ist der Gleichungsfehler und folglich das Gütemaß bei der Berücksichtigung der Historie für den Systemparameter b_0 ungleich Null. Wenn die Historie vernachlässigt wird, wird der Gleichungsfehler für den zweiten Fall negativ beziehungsweise für den dritten Fall positiv. Um dies auszugleichen und somit das Gütemaß zu minimieren, muss entsprechend $\hat{b}_0 > b_0$ beziehungsweise $\hat{b}_0 < b_0$ sein.

Damit ist plausibilisiert, dass durch Vernachlässigung eines Teils der Historie die Parameter des Systems das Gütemaß (6.69) nicht minimieren. Da die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ abhängig von den Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sind, müssen auch die ermittelten Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ von den zum System zugehörigen Ableitungsordnungen $\boldsymbol{\theta}$ bei einer Vernachlässigung eines Teils der Systemhistorie abweichen.

Beispiel 6.6:
Die theoretischen Überlegung zur Änderung der Optimumslage des Gütemaßes (6.69) *aufgrund der Nicht-Berücksichtigung der gesamten Historie wird anhand des Beispielsystems*

$$G(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0}}{s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \tag{6.87}$$

mit $a_0 = 0{,}5$, $b_0 = 1$, $\alpha_1 = 0{,}6$, $\alpha_0 = 0$ *und* $\beta_0 = 0{,}3$ *illustriert. Das System wird insgesamt* $50\,\mathrm{s}$ *mit einem Pseudozufallsrauschen [IM11, S. 164 f.] mit einer Amplitude von* 1 *und einem Sprungabstand von* $1\,\mathrm{s}$ *angeregt. Nach* $t_1 = 15\,\mathrm{s}$ *wird das Ein- und Ausgangssignal* u *und* y *zum Aufstellen des Gütemaßes* (6.69) *verwendet. Das dafür benötigte Ausgangssignal* y_{smp} *wird mit* (5.3) *berechnet. Die Speicherlänge für* (5.3) *wird zu* $L = 500$ *gewählt und alle* $5\,\mathrm{s}$ *wird ein Abtastpunkt zur Bildung des Gleichungsfehlers* (6.70) *festgelegt.*

Um die Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ *und Ableitungsordnungen* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *zu bestimmen, die das Gütemaß* (6.69) *bei Verwendung des SMPs minimieren, wird ein CNLS[23]-Fit durchgeführt. Den kleinsten Wert* $J\left(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = 1 \times 10^{-8}$ *nimmt das Gütemaß für die Parameter* $\hat{a}_0 \approx 0{,}5265$, $\hat{b}_0 \approx 1{,}0189$ *und die Ableitungsordnungen* $\hat{\alpha}_1 \approx 0{,}5920$, $\hat{\alpha}_0 \approx 0{,}0130$ *und* $\hat{\beta}_0 \approx 0{,}2900$ *an. Dahingegen beträgt der Wert des Gütemaß* $J\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\theta}\right) = 1{,}8 \times 10^{-5}$ *für die Parameter* $\boldsymbol{p}$ *und die Ableitungsordnungen* $\boldsymbol{\theta}$ *des Systems. Bereits aus diesem Ergebnis ist erkennbar, dass sich das Optimum des Gütemaßes verschoben hat.*

Die Plausibilisierung zuvor wurde für den Parameter b_0 *hergeleitet, weshalb dieser nochmals näher betrachtet wird. Die nicht berücksichtigte Historie des Eingangssignals liefert einen negativen Beitrag*

$$\frac{1}{T^{\beta_0}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1 - t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\beta_0}{l} u\left(t_1 - lT\right) u\left(t\right) = -3{,}04 \tag{6.88}$$

zum Gütemaß. Um diesen negativen Anteil auszugleichen, muss der Parameter $\hat{b}_0$, *der das Gütemaß ohne vollständige Historie minimiert, größer als der eigentliche Parameter* b_0 *sein. Dieses ist nach dem CNLS-Fit, bei dem sämtliche Kombinationen innerhalb der zulässigen Intervalle mit* $\hat{b}_0 \approx 1{,}0189$ *gegeben. In der Abbildung 6.12 ist das Gütemaß in Abhängigkeit des Parameters* b_0 *dargestellt, wobei die anderen Parameter entsprechend des CNLS-Fits gewählt werden. Das Gütemaß weist bei* $\hat{b}_0 \approx 1{,}0189$ *anstelle bei* b_0 *ein Minimum auf.*

[23] Komplexwertige, nichtlineare Methode der kleinsten Quadrate (engl. complex nonlinear least squares)

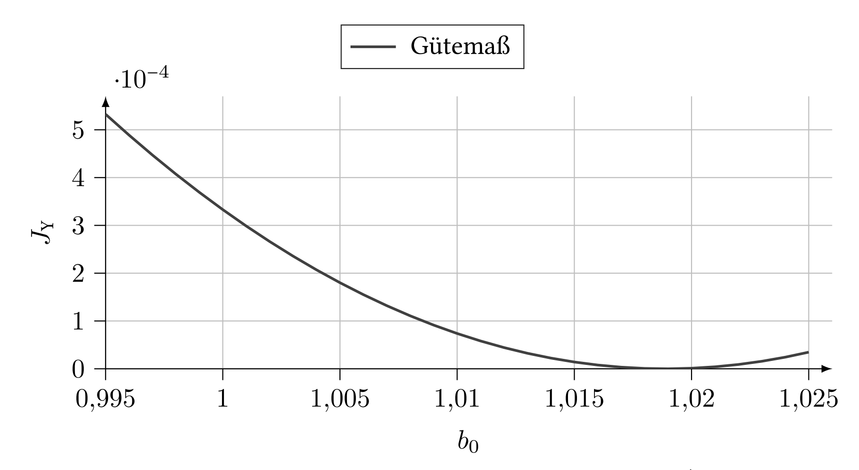


Abbildung 6.12: Der Verlauf des Gütemaßes in Abhängigkeit des Eingangsparameters $\hat{b}_0$, wenn die Systemhistorie vernachlässigt wird und alle anderen Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}$ und Ableitungsordnungen $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nach dem Brute-Force-Ansatz gewählt werden

Der in diesem Abschnitt beschriebene Ansatz zur Ableitungsordnungsidentifikation, der auf dem Gleichungsfehler (6.70) basiert, lässt sich mit der im Abschnitt 4.3.2 vorgestellten IV-Methode zu einem Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation kombinieren. Bei Anwendung der im Abschnitt 5.1 definierten Berechnungsvorschrift (5.3), die auf dem SMP basiert, besteht nicht die Anforderung, dass das System zu Beginn der Simulation in Ruhe sein muss. Daher wird auch das gemeinsame Identifikationsverfahren diesbezüglich nicht eingeschränkt. Weiterhin schätzt die IV-Methode die Parameter erwartungstreu auch bei verrauschten Messdaten und ebenso besteht für die Berechnungsvorschrift (5.3) keine Einschränkung diesbezüglich. Damit bildet auch das in diesem Abschnitt kombinierte Verfahren eine Antwort auf die zweite Forschungsfrage.

6.2.4 Zusammenfassung und Diskussion der optimierungsbasierten Verfahren

Zwei optimierungsbasierte Zeitbereichsverfahren zur Identifikation der Ableitungsordnungen eines fraktionalen Systems sind in diesem Abschnitt hergeleitet worden Die Herleitung erfolgt unter Berücksichtigung der Anforderungen, dass sich das System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befindet und im Gegensatz zum Abschnitt 6.1 das Ausgangssignal mit Rauschen überlagert ist.

Das erste Verfahren basiert auf dem Modulationsfunktionsverfahren und nutzt als Gütemaß eine Summe der quadrierten Gleichung der Nullstellensuche (6.6) (siehe Abschnitt 6.2.1). Da der Ansatz wie die Verfahren im Abschnitt 6.1 auf dem Modulationsfunktionsverfahren aufbauen, ist der Einfluss der Initialisierungsfunktion über die Eigenschaft $(P4)$ der Modulationsfunktion eliminierbar. Zum Lösen des formulierten Optimierungsproblems (6.52) wird das Gauß-Newton-Verfahren eingesetzt, für das Bedingungen zur Konvergenz hergeleitet werden

(siehe Theorem 6.3). Zur gemeinsamen Parameteridentifikation wird das Verfahren analog zum Abschnitt 6.1.3 mit dem Verfahren aus Kapitel 4 kombiniert (siehe Abschnitt 6.2.2). Anstelle der LS-Methode wird die IV-Methode eingesetzt, da aufgrund des verrauschten Ausgangssignals die LS-Methode entsprechend Lemma 4.15 zu fehlerhaften Identifikationsergebnissen führt. Für die IV-Methode in Blockverarbeitung ist eine analytische Berechnung der partiellen Ableitungen der Parameter möglich (siehe Lemma 6.10), die zur Bestimmung der Hesse-Matrix des Gauß-Newton-Verfahrens benötigt werden. Die notwendige Beschränktheit dieser Ableitungen für die Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren lässt sich durch das Eingangssignal, das simulierte Ausgangssignal und die Modulationsfunktion gewährleisten (siehe Lemma 6.11). Beim Einsetzen der rekursiven IV-Methode zur Parameteridentifikation wird die Approximation der partiellen Ableitungen durch den Differenzenquotienten präsentiert, der die Beschränktheit per Definition sicherstellt. In diesem Fall wird für die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation das zweistufiges Verfahren aus Abschnitt 6.1.3 vorgeschlagen, bei dem abwechselnd die Parameter- und die Ableitungsordnungsidentifikation ausgeführt wird (siehe Abbildung 6.2).

Im zweiten Verfahren wird das Gütemaß als quadratischer Fehler zwischen dem Ausgangssignal des fraktionalen Systems und einem simulierten Ausgangssignal formuliert (siehe Abschnitt 6.2.3). Damit auch dieses Verfahren für fraktionale Systeme, die sich zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befinden eingesetzt werden kann, wird zur Berechnung des simulierten Ausgangssignals die geschlossene Lösung unter Berücksichtigung des SMPs (5.3) verwendet. Wie beim ersten optimierungsbasierten Verfahren wird das Gauß-Newton-Verfahren eingesetzt und Bedingungen für die Konvergenz im Theorem 6.4 beschrieben. In diesem Zusammenhang tritt neben dem Gleichungsfehler auch die partielle Ableitung des Gleichungsfehlers (siehe Lemma 6.12) auf, die sich durch Verwendung des SMPs und der Grünwald-Letnikov-Definition ohne auftretende Singularität berechnen lassen, falls eine von Null verschiedenen Abtastzeit verwendet wird (siehe Theorem 6.4). Wie bei den vorherigen Verfahren werden ebenfalls die Parameter abhängig der Ableitungsordnungen für die Evaluierung des Gütemaßes benötigt. Aufgrund der verrauschten Messungen des Ausgangssignals wird auch für dieses Verfahren auf das Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der IV-Methode (siehe Abschnitt 4.3) zurückgegriffen, wodurch ein Verfahren zur simultanen Ableitungsordnungs- und Parameteridentifikation resultiert (siehe Abbildung 6.2).

Da beide Verfahren keine erwartungstreue Schätzer sind, werden im Allgemeinen die Ableitungsordnungen lediglich näherungsweise bestimmt. Dies zeigt sich für den auf dem Modulationsfunktionsverfahren basierten Ansatz durch (6.46) und für den auf dem Gleichungsfehler basierten Ansatz durch den Rauschterm in (5.6). Weiterhin besitzt auch das Vernachlässigen der Systemhistorie im zweiten Ansatz einen Einfluss auf die Optimumslage des zugrunde gelegten Gütemaßes (6.69) (siehe Beispiel 6.6). Da beide Verfahren aber auch bei einem verrauschten Ausgangssignal eine Ableitungsordnungsbestimmung ermöglichen und zudem nicht auf Systeme in Ruhe beschränkt sind, tragen beide Verfahren zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage bei. In Kombination mit dem Parameteridentifikationsverfahren, das im Abschnitt 4.3 beschrieben ist und die erste Forschungsfrage adressierte, lassen sich mit beiden Verfahren neben den Ableitungsordnungen auch gleichzeitig die Parameter des fraktionalen Systems ermitteln. Damit stellt die Kombination der Verfahren eine Antwort auf die zentrale Forschungsfrage der vorliegenden Arbeit unter Berücksichtigung der formulierten Anforderungen dar (siehe Abschnitt 2.3).

7 Identifikation der Parameter- und Ableitungsordnung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle

In diesem Kapitel sollen erstmalig die im Rahmen der Arbeit entwickelten Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.1 und 6.2.3 in Kombination mit der rekursiven IV-Methode entsprechend Lemma 4.17 zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation einer realen LiPO-Batteriezelle eingesetzt werden. Als Testträger wird eine Zelle der Firma Kokam, deren technischen Daten im Anhang G angegeben sind, eingesetzt.

Im Abschnitt 7.1 wird zunächst der Messaufbau beschrieben und das reale Batteriemodell aus der allgemeinen Beschreibung (2.26) abgeleitet. Anschließend wird die Versuchsdurchführung erläutert und die Referenzparameter des eingesetzten Batteriemodells ermittelt. Die Identifikationsergebnisse, die aus der Anwendung der entwickelten Verfahren resultieren, werden im Abschnitt 7.2 präsentiert. Eine Diskussion der Identifikationsergebnisse im Abschnitt 7.3 schließt das Kapitel ab.

7.1 Versuchsbeschreibung und fraktionales Batteriezellmodell

Messaufbau

Die für die praktische Erprobung der Identifikationsverfahren notwendige Messung wird am Batteriemessstand des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS), der detailliert im Anhang F beschrieben wird, durchgeführt. Die Anregung erfolgt über ein Kepco *BOP 20-20M*, die Spannungsmessung über das A/D-Board *DS2004 High-Speed A/D Board* und die Strommessung über das *Agilent 34410A*. Die Strom- und Spannungsmessung kann auch über das *BOP 20-20M* vorgenommen werden. Allerdings sind die Standardabweichungen des *BOP 20-20M* mit $\sigma_{\mathrm{BOP},i} = 2{,}6\,\mathrm{mA}$ für die Strommessung und mit $\sigma_{\mathrm{BOP},u} = 2{,}9\,\mathrm{mV}$ für die Spannungsmessung deutlich größer als die Standardabweichungen der Agilent-Geräte mit $\sigma_{\mathrm{dm}} = 1{,}1\,\mathrm{mA}$ für den Messbereich von ±1 A und des A/D-Board-Kanals mit $\sigma_{2004} = 0{,}14\,\mathrm{mV}$. Dies liegt darin begründet, dass die Strom- und Spannungsmessung des *BOP 20-20M* nicht als Vierpunktmessung ausgeführt und von der Stromversorgung des *BOP 20-20M* physikalisch entkoppelt ist. Die Dauer, um die Messdaten des Digitalmultimeters *Agilent 34410A* zu übertragen, benötigt ungefähr $T = 0{,}05 - 0{,}07\,\mathrm{s}$. Während der Übertragung kann das Digitalmultimeter keine Messdaten aufnehmen. Um durch Messdatenverlust keine fehlerhafte Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen zu erhalten, wird die Abtastzeit zu $T = 0{,}1\,\mathrm{s}$ gewählt.

Da das fraktionale Impedanzmodell (2.25) zur Beschreibung einer LiPO-Batteriezelle lediglich das Kleinsignalverhalten für den aktuellen SOC beschreibt und die OCV nicht explizit berücksichtigt, muss die gemessene Ausgangsspannung um die aktuelle OCV für eine erwartungstreue Bestimmung der Parameter korrigiert werden. Eine stromrichtige Messung führt auf einen systematischen Fehler in der Spannungsmessung, sodass die Korrektur der Ausgangsspannung fehlerbehaftet ist [Ler16, S. 229 ff.]. Der zusätzliche Spannungsabfall über dem Strommessgerät ist zwar sehr gering, suggeriert jedoch speziell im Bereich von SOC = 40 % bis SOC = 60 % eine große Änderung des SOCs, da der Verlauf der SOC-OCV-Kurve in diesem Bereich (siehe Abbildung G.2) sehr flach ist. Infolgedessen wären die Identifikationsergebnisse der Parameter und Ableitungsordnungen, die abhängig vom SOC sind, nicht aussagekräftig. Aus diesem Grund wird die Strom-Spannung-Messung spannungsrichtig ausgeführt. Der Messaufbau ist schematisch in der Abbildung 7.1 dargestellt.

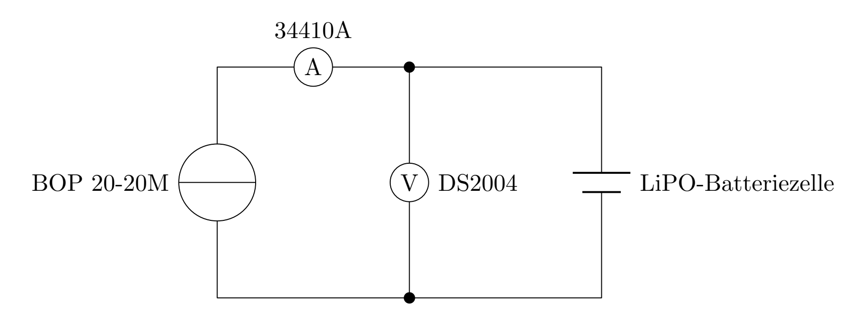


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung des Messaufbaus zur Identifikation der Parameter und Ableitungsordnung einer LiPO-Batteriezelle

Impedanzmodell der LiPO-Batteriezelle

In der Definition 2.4 ist ein allgemeines fraktionales Modell zur Beschreibung der Impedanz einer LiPO-Batteriezelle angegeben. Aufgrund der Abtastzeit von $T = 0{,}1\,\mathrm{s}$ kann jedoch nur der Modellanteil bis maximal $f_T = 5\,\mathrm{Hz}$ gemäß dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem korrekt rekonstruiert werden. Aus den in der Abbildung A.1 dargestellten Impedanzspektren geht hervor, dass die maximale Frequenz des kapazitiven Bereichs im Bereich von $f \approx 0{,}3 - 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ liegt. Dadurch lässt sich dieser Bereich mit Hilfe der Messungen exakt rekonstruieren, wohingegen der Bereich der Festkörperdiffusion und des Ladungstransfers höherfrequente Anteile aufweisen. Daher begrenzt sich das für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation verwendete fraktionale Impedanzmodell der LiPO-Batteriezelle auf den kapazitiven Bereich des allgemeinen Impedanzmodells (2.26)

$$\underline{Z}_{\mathrm{LIB}}(s) = \tilde{R}_0 + \frac{1}{s^{\alpha} C_{\mathrm{Diff}}}. \tag{7.1}$$

Der Widerstand $\tilde{R}_0$ entspricht nicht dem ohmschen Widerstand R_0 in (2.26), sondern berücksichtigt zu dem ohmschen Widerstand R_0 ebenfalls approximativ die schnelleren Dynamiken. Für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation muss das Modell in der Form (3.39) gegeben sein (siehe Beispiel 2.1). Dadurch ergibt sich für (7.1) das für die Identifikation genutzte Modell

$$\underline{Z}_{\mathrm{LIB,ident}}(s) = \frac{b_1 s^{\alpha} + b_0}{s^{\alpha}} \tag{7.2}$$

mit der Normierung $a_n = 1$ entsprechend der Annahme 3.1 und den Parametern $b_1 = \tilde{R}_0$ sowie $b_0 = 1/C_{\mathrm{Diff}}$.

Versuchsdurchführung

Bei der Versuchsdurchführung muss zusätzlich zur SOC-Abhängigkeit des fraktionalen Impedanzmodells (7.2) berücksichtigt werden, dass die Parameter und die Ableitungsordnung des fraktionalen Batteriemodells temperaturabhängig sind. Aus diesem Grund wird die LiPO-Batteriezelle im Klimaschrank betrieben, dessen Innenraum für die gesamte Dauer der Messung auf $T_K = 20\,°\mathrm{C}$ geregelt wird. Erst nachdem die gewünschte Temperatur für $30\,\mathrm{min}$ eingeregelt ist, wird die Stromanregung gestartet.

Beim Anregungssignal ist ein Kompromiss zu finden, dass die langsamen Dynamiken angeregt werden, aber der SOC nicht geändert wird. Damit sich die langsamen Dynamiken ausbilden können, wird als Anregungssignal ein Stromprofil mit einer Pulsdauer von $T_P = 10\,\mathrm{s}$ vorgegeben. Dieses ist wie bei den numerischen Beispielen zuvor als Pseudozufallsrauschen ausgeführt. Um den SOC über die gesamte Messdauer möglichst konstant zu halten, wird die Peak-zu-Peak-Amplitude des Stromsignals zu $\hat{i} = 400\,\mathrm{mA}$ gewählt. Außerdem wird das Stromsignal so entworfen, dass es bezogen auf die Gesamtanregungsdauer mittelwertfrei ist. Die Abbildung 7.2 zeigt den mit dem *Agilent 34410A* gemessenen Strom, der das Eingangssignal für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation bildet. Die zugehörige Ausgangsspannung, die über das A/D-Board *DS2004 High-Speed A/D Board* erfasst wurde, ist in der Abbildung 7.3 aufgetragen.

Bevor die in der Arbeit entwickelten Methoden angewendet werden, werden die Referenzwerte der Parameter $\tilde{R}_0$, C_{Diff} und α für den Arbeitspunkt der verwendeten LiPO-Batteriezelle bestimmt. Zudem liefert das in den Methoden verwendete Parameteridentifikationsverfahren nur dann erwartungstreue Ergebnisse, wenn das Ausgangsmesssignal um die OCV korrigiert wird [IM11, S. 255]. Um die OCV ermitteln zu können und bei der Bestimmung der Referenzwerte keinen Fehler aufgrund der Systemhistorie zu erhalten, wird das System zu Beginn bis $T_{\mathrm{R}} = 20\,\mathrm{s}$ nicht angeregt. Diese Zeit wird zum einen genutzt, um die OCV zu bestimmen. Zum anderen wird mittels der Standardabweichungen überprüft, ob sich die LiPO-Batteriezelle in Ruhe befindet.

Im ersten Schritt wird die OCV bestimmt. Dafür wird das arithmetische Mittel der Spannungsmesswerte, die in den ersten zwanzig Sekunden aufgenommen wurden, gebildet. Die so bestimmte OCV beträgt

$$\mathrm{OCV} = 3{,}749\,\mathrm{V}. \tag{7.3}$$

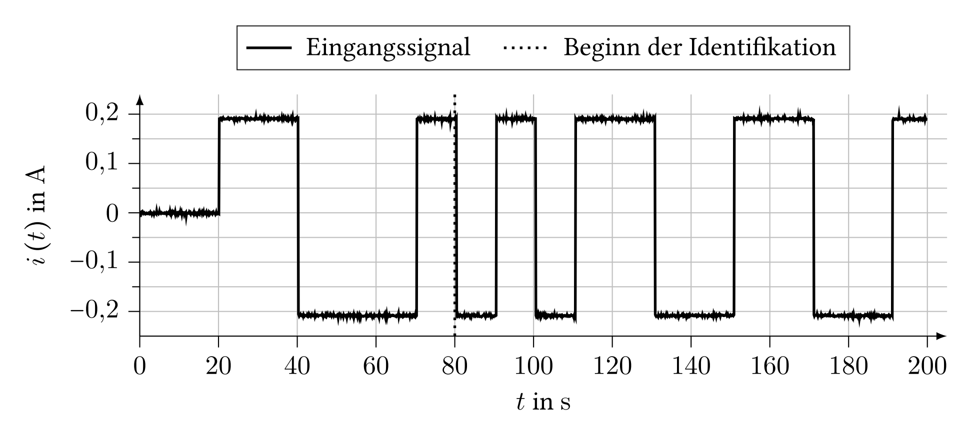


Abbildung 7.2: Zeitverlauf des Anregungsstroms, der mit dem Digitalmultimeter *Agilent 34410A* gemessen wurde

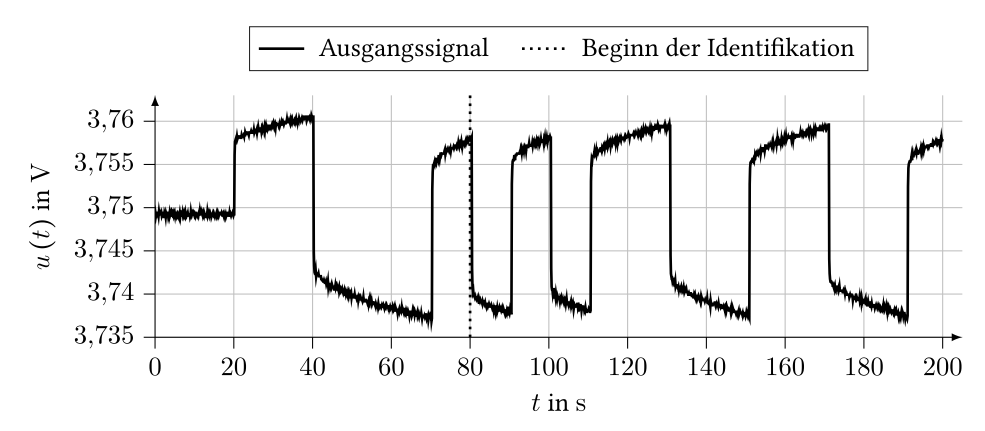


Abbildung 7.3: Zeitverlauf der Ausgangsspannung, die mit dem A/D-Board *DS2004 High-Speed A/D Board* gemessen wurde

Im zweiten Schritt wird überprüft, ob sich das System in Ruhe befindet. Dies wird angenommen, wenn die Messwerte innerhalb der Messungenauigkeit des A/D-Boards *DS2004 High-Speed A/D Board* liegen. Dafür wird zunächst die Standardabweichung der Messung ermittelt, die

$$\sigma_{2004,\mathrm{mess}} = 0{,}146\,\mathrm{mV} \tag{7.4}$$

beträgt. Anschließend wird der experimentell ermittelte Wert $\sigma_{2004,\mathrm{mess}}$ mit der Standardabweichung des Messkanals $\bar{\sigma}_{2004} = 0{,}15\,\mathrm{mV}$ des A/D-Boards *DS2004 High-Speed A/D Board* verglichen. Die Standardabweichung des A/D-Boards $\bar{\sigma}_{2004}$ ist die gemittelte Standardabweichung über alle Kanäle, die über einen längeren Zeitraum ($T_\sigma = 300\,\mathrm{s}$) und ohne angeschlossene Last bestimmt wird. Da $\sigma_{2004,\mathrm{mess}} < \bar{\sigma}_{2004}$ ist, wird das System als in Ruhe angenommen.

Im Nachfolgenden werden die Referenzwerte der Parameter und der Ableitungsordnung aus den Messungen bestimmt. Die differentielle Kapazität $C_{\mathrm{Diff,ref}}$ lässt sich nach (2.25) aus der Differentiation der SOC-OCV-Kurve ableiten. Dafür wird zunächst der zur OCV gehörige SOC mit Hilfe der Abbildung G.2 abgelesen. Der abgelesene SOC beträgt $34{,}9\,\%$. Mit diesem kann aus der Abbildung G.3 direkt die differentielle Kapazität mit

$$C_{\text{Diff,ref}} = 191{,}6\,\text{A}\,\text{s}\,\text{V}^{-1} \tag{7.5}$$

abgelesen werden. Damit ist der zu identifizierende Parameter

$$b_0 = \frac{1}{C_{\text{Diff,ref}}} = 0{,}0052\,\text{V}\,\text{A}^{-1}\,\text{s}^{-1}. \tag{7.6}$$

Der zweite Parameter und die Ableitungsordnung werden mittels eines CNLS-Fits bestimmt, wobei der Fehler zwischen einem simulierten Ausgangssignal y_s, das mit der geschlossenen Lösung (3.50) bestimmt wird, und der um die Ruhespannung korrigierten gemessenen Ausgangsspannung (siehe Abbildung H.2) minimiert wird. Die so ermittelten Referenzwerte sind

$$b_1 = \tilde{R}_0 = 0{,}039\,\Omega \quad \text{und} \tag{7.7}$$

$$\alpha = 0{,}39. \tag{7.8}$$

Das simulierte Ausgangssignal, das sich bei der Verwendung der Referenzparameter (7.6) – (7.8) ergibt, ist zusammen mit der gemessenen Ausgangsspannung in der Abbildung 7.4 (oben) dargestellt. Für die Simulation wird die geschlossene Lösung (3.50) eingesetzt, da sich die Lithium-Ionen-Batteriezelle zu Beginn in Ruhe befindet. In der Abbildung 7.4 (unten) ist der resultierende Fehler zwischen der Messung u_{mess} und der Simulation u_{sim} der Ausgangsspannung

$$e_{\text{ref}}(t) := u_{\text{mess}}(t) - u_{\text{sim}}(t) \tag{7.9}$$

aufgetragen. Dabei fällt auf, dass der Fehler im Allgemeinen in der Größenordnung des Rauschens liegt. Die Größenordnung des Rauschens lässt sich direkt in den ersten 20 s ablesen, da zu diesem Zeitpunkt keine Anregung erfolgt. Einzig, wenn das Ausgangssignal sich sprunghaft ändert, kommt es zu einer geringfügig größeren Abweichung zwischen der Messung und der Simulation. Diese Abweichung ist jedoch um eine Zehnerpotenz kleiner als die sprunghafte Änderung. Das Auftreten der größeren Abweichung an den Sprungstellen ist darauf zurückzuführen, dass das in der Arbeit verwendete Modell (7.1) die höherfrequenten Anteile der Lithium-Ionen-Batteriezelle nicht abbildet.

7.2 Identifikation der Parameter und der Ableitungsordnung des fraktionalen Batteriezellmodells

Da ein wesentlicher Aspekt die praktische Anwendbarkeit der Verfahren ist, wird die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation als zweistufiges iteratives Verfahren durchgeführt (siehe Abschnitt 6.1.3 und 6.2.2 sowie Abbildung 6.2). Für die Identifikation wird angenommen, dass lediglich die Daten des Eingangs- und Ausgangssignals aus dem vorherigen Abschnitt ab $t_1 = 80\,\text{s}$ zur Verfügung stehen. Dieser Zeitpunkt ist ebenfalls in der Abbildung 7.2 und 7.3 als vertikal gestrichelte Linie markiert. Aus den beiden Abbildungen geht hervor, dass die Messung sowohl des Ein- als auch des Ausgangssignals mit Rauschen überlagert ist. Die in

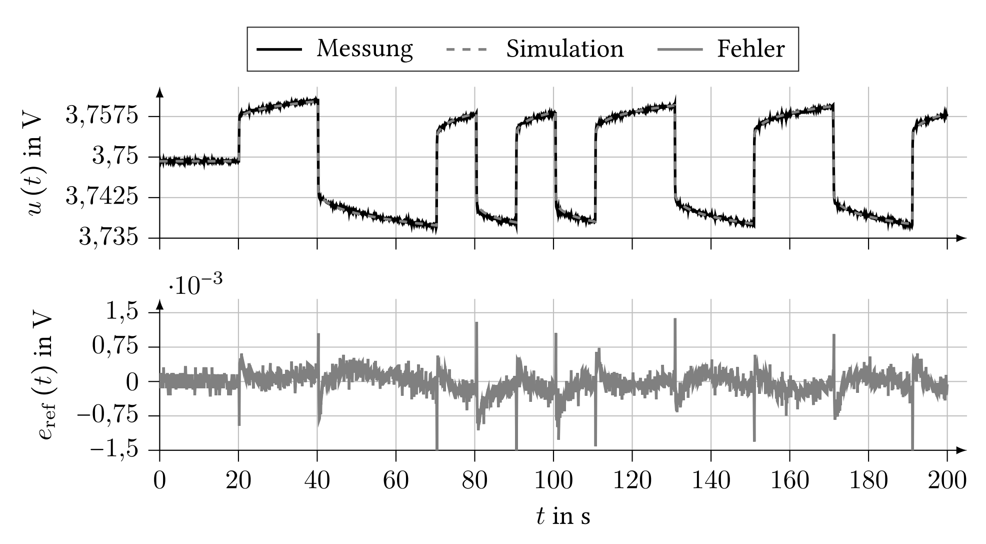


Abbildung 7.4: Vergleich der Messung und der mit den Referenzparametern durchgeführten Simulation der Ausgangsspannung

der Arbeit beschriebenen Verfahren setzen jedoch ein unverrauschtes Eingangssignal voraus. Das vorgegebene Eingangssignal, das unverrauscht ist, kann nicht direkt für die Identifikation eingesetzt werden. Dies liegt daran, dass durch die Datenübertragung und Schaltprozesse in der Stromquelle Kepco *BOP 20-20M* das gestellte Eingangssignal verzögert gegenüber dem vorgegebenen Eingangssignal ist. Die Verzögerung liegt im Bereich von $T_{\text{ver}} = 100\,\text{ms} - 300\,\text{ms}$. Da die LiPO-Batteriezelle auf das real gestellte Eingangssignal reagiert, erfolgt die Änderung im Ausgangssignal entsprechend. Damit die Zeitpunkte der Anregung und Reaktion übereinstimmen und das unverrauschte Eingangssignal genutzt werden kann, müssen die Zeitpunkte der Sprünge des unverrauschten Eingangssignals an die des gemessenen Eingangssignals angepasst werden. Das angepasste Eingangssignal ist in der Abbildung H.1 dargestellt. Weiterhin wird die um die OCV (7.3) korrigierte Spannungsmessung, die in der Abbildung H.2 abgebildet ist, als Ausgangssignal für die Identifikation.

Da die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation als zweistufiges iteratives Verfahren durchgeführt wird, wird für die Parameteridentifikation auf die rekursive IV-Methode aus Lemma 4.17 zurückgegriffen (siehe Abschnitt 6.2.2 und Abbildung 6.2). Da die rekursive IV-Methode eingesetzt wird, muss eine initiale Kovarianzmatrix vorgegeben werden (siehe Lemma 4.17). Da zwei Parameter zu identifizieren sind, ist die Kovarianzmatrix eine 2×2-Matrix. Aufgrund der sehr kleinen Referenzwerte der Parameter (7.6) und (7.7) werden die beiden Diagonalelemente der initialen Kovarianzmatrix auf 0.1 festgelegt. Weiterhin wird eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals zum Aufstellen der Hilfsvariablen benötigt (siehe Abschnitt 4.3.2). Als Schätzung wird eine Simulation des Ausgangssignals verwendet, die mit der auf dem SMP basierenden geschlossenen Lösung (5.3) mit einer Speicherlänge von $L = 200$ berechnet wird. Da keine initialen Parameterwerte vorgegeben werden, ist eine Simulation zu Beginn des Identifikationsprozesses nicht möglich. Aus diesem Grund wird die erste Parameteridentifikation als LS-Methode anstatt IV-Methode in der ersten Iteration des

zweistufigen Verfahrens ausgeführt. Nach dieser liegen Parameterschätzungen $\hat{\boldsymbol{p}}$ vor. Mit diesen Parametern wird die Simulation zum Aufstellen der Hilfsvariablen der nächsten Iteration durchgeführt. Hierbei ist anzumerken, dass die Hilfsvariablen als unkorreliert zur Spannungsmessung angenommen werden können, da zur Strommessung ein anderes Messgerät eingesetzt wird. Dies ist für die erwartungstreue Identifikation der Parameter eine notwendige Voraussetzung (siehe Abschnitt 4.3.2). Sämtliche Einstellparameter der IV-Methode sind in der Tabelle I.1 zusammengefasst.

Da die Parameteridentifikation aus Abschnitt 4.3.2 auf dem Modulationsfunktionsverfahren basiert, muss eine Modulationsfunktion vorgegeben werden. Um die Initialisierungsfunktion nicht berücksichtigen zu müssen, wird als Modulationsfunktion die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) eingesetzt und die Anzahl der Impulse wird zu $s = 10$ und die Ordnung zu $o = 5$ gewählt. Dadurch besitzt diese die Eigenschaft $(P1)$ wegen $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ und $s \geq o + 2$. Unter Berücksichtigung der Referenzgröße der Ableitungsordnung (7.8) besitzt die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion mit den gewählten Größen die Eigenschaft $(P4)$, da $o \geq \lceil \alpha_n \rceil$ ist. Der Identifikationshorizont wird zu $T_i = 40\,\mathrm{s}$ festgelegt und zum Erzeugen neuer unabhängiger Gleichungen ausgehend von dem Identifikationsbeginn stets um $T_\Delta = 4\,\mathrm{s}$ verschoben. Damit ist das erste Intervall für die Parameteridentifikation $[80\,\mathrm{s}, 120\,\mathrm{s}]$ und das zweite Intervall $[84\,\mathrm{s}, 124\,\mathrm{s}]$. Mit der Gesamtdauer der Messung $T_{\mathrm{ges}} = 200\,\mathrm{s}$ folgt, dass maximal 15 Iterationen innerhalb der rekursiven IV-Methode ausgeführt werden können. Diese maximale Anzahl an Iterationen markiert die erste Abbruchbedingung. Als zweite Abbruchbedingung für die Parameteridentifikation wird die Toleranz $\varepsilon_{\mathrm{para}} = 10^{-6}$ vorgegeben, die für beide Parameter gilt. Wenn die Änderung aller Parameter kleiner als die vorgegebene Toleranz ist, gelten die Parameter als konvergiert und die Parameteridentifikation wird vorzeitig abgebrochen. Für die Parameteridentifikation sind die wesentlichen Einstellparameter in der Tabelle I.2 aufgelistet.

Für die Ableitungsordnungsidentifikation werden die beiden Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.1 und 6.2.3 angewendet. In beiden Fällen wird der Startwert zu $\hat{\alpha}_{0,0} = 0{,}8$ festgelegt. Außerdem erfolgt für beide Verfahren die Berechnung der partiellen Ableitungen der Parameter nach der Ableitungsordnung mittels dem Differenzenquotienten (6.34). Die dafür benötigte Abweichung zum aktuellen Wert der Ableitungsordnung wird auf $\Delta = 0{,}001$ gesetzt. Darüber hinaus wird für das Verfahren aus Abschnitt 6.2.1 eine Modulationsfunktion benötigt. Es wird ebenfalls eine gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) mit denselben Eigenschaften wie bei der Parameteridentifikation verwendet, wodurch diese ebenfalls die Eigenschaft $(P1)$ und $(P4)$ besitzt. Für das andere Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.3 müssen die Zeitpunkte für die Bildung des Gleichungsfehlers vorgegeben werden. Ausgehend vom Startzeitpunkt werden insgesamt 50 Zeitpunkte im Abstand von $T_{\Delta,h} = 2\,\mathrm{s}$ gewählt. Wie beim Verfahren zur Parameteridentifikation werden zwei Abbruchbedingungen für das zweistufige iterative Verfahren aufgestellt. Das Verfahren wird zum einen abgebrochen, falls 500 Iterationen ausgeführt wurden. Zum anderen wird das Verfahren beendet, falls die Änderung der Ableitungsordnung zwischen zwei Iterationen kleiner als die Toleranz $\varepsilon_{\mathrm{ord}} = 10^{-6}$ ist. Die Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation, die auf dem Modulationsfunktionsverfahren aufbaut, sind in der Tabelle I.3 aufgeführt und die Einstellparameter für das zweite Verfahren in der Tabelle I.4.

Die Identifikationsergebnisse beider Verfahren sind in der Abbildung 7.5 dargestellt. Die Ergebnisse, die mit dem Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.1 basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren erzielt werden, sind als durchgezogene Linie und die Ergebnisse des zweiten Verfahrens aus dem Abschnitt 6.2.3 als gestrichelte Linie illustriert. Die im Abschnitt 7.1 bestimmten Referenzwerte sind als gepunktete Linie eingezeichnet. Beide Verfahren konvergieren gegen die Referenzwerte. Auffällig dabei ist, dass das auf dem Modulationsfunktionsverfahren basierende Verfahren bereits nach 7 Iterationen konvergiert. Im Gegensatz dazu benötigt das Verfahren, dem der Gleichungsfehler zugrunde liegt, 27 Iterationen. Die relativen Fehler der einzelnen Parameter und der Ableitungsordnung

$$e_{p,i} = \frac{\{\hat{\boldsymbol{p}}\}_i\,(\hat{\alpha}_q) - \{\boldsymbol{p}\}_i}{\{\boldsymbol{p}\}_i} \cdot 100\,\% \tag{7.10}$$

bezogen auf die Referenzwerte nach der Konvergenz des zweistufigen Verfahrens sind in der nachstehenden Tabelle 7.1 angegeben. Daraus geht hervor, dass die identifizierten Parameter und die Ableitungsordnung für beide Verfahren einen kleinen Fehler aufweisen. Allerdings sind alle relativen Fehler, die sich für das auf dem Modulationsfunktionsverfahren basierten Verfahren ergeben, betragsmäßig kleiner als die zugehörigen relativen Fehler des zweiten Verfahrens.

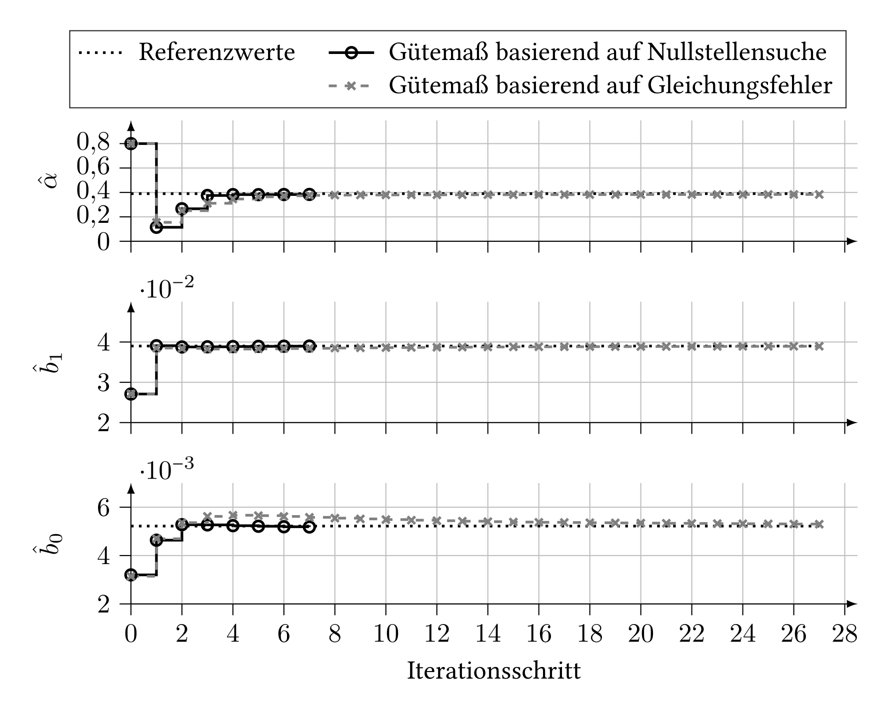


Abbildung 7.5: Vergleich der Entwicklung der Parameter und der Ableitungsordnung des LiPO-Batteriemodells (7.2), die mit den beiden im Abschnitt 6.2 beschriebenen Methoden unter Verwendung realer Messdaten identifiziert werden

Tabelle 7.1: Vergleich der relativen Fehler beider optimierungsbasierter Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation

Verfahren	Relativer Fehler
Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren	$e_{\alpha,1} = -1{,}6\,\%$ $e_{\hat{b}_1,1} = -0{,}01\,\%$ $e_{\hat{b}_0,1} = -0{,}7\,\%$
Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Gleichungsfehler	$e_{\alpha,2} = -1{,}7\,\%$ $e_{\hat{b}_1,2} = -0{,}1\,\%$ $e_{\hat{b}_0,2} = 1{,}5\,\%$

Die Identifikationsergebnisse der beiden Verfahren (siehe Abbildung 7.5) werden im Folgenden simulativ mit der Messung verglichen[24]. Das Ergebnis ist in der Abbildung 7.6 dargestellt. Die Tatsache, dass sich die Identifikationsergebnisse lediglich geringfügig unterscheiden, zeigt sich auch in den Verläufe, die grafisch übereinander liegen. In der Abbildung 7.7 ist der resultierende Fehler zwischen der Messung u_{mess} und den beiden Simulationen u_{sim} der Ausgangsspannung

$$e_{\text{mess}}(t) := u_{\text{mess}}(t) - u_{\text{sim}}(t) \tag{7.11}$$

aufgetragen. Wie bei der Simulation mit den Referenzparametern (siehe Abbildung 7.4) fällt auf, dass der Fehler im Allgemeinen in der Größenordnung des Rauschens liegt. Da in den ersten 20 s keine Anregung erfolgt, kann die Größenordnung des Rauschens aus dem Zeitintervall direkt abgelesen werden. Aufgrund der vernachlässigten Abbildung der höherfrequenten Anteile der Lithium-Ionen-Batteriezelle im Modell (7.1) treten in diesem Fall wie bei der Simulation mit den Referenzparametern, die in der Abbildung 7.4 dargestellt ist, geringfügig größere Abweichungen zwischen der Messung und der Simulation zu den Zeitpunkten der sprunghaften Änderung des Ausgangssignals auf. Diese Abweichungen sind jedoch ebenfalls um eine Zehnerpotenz kleiner als die sprunghafte Änderung.

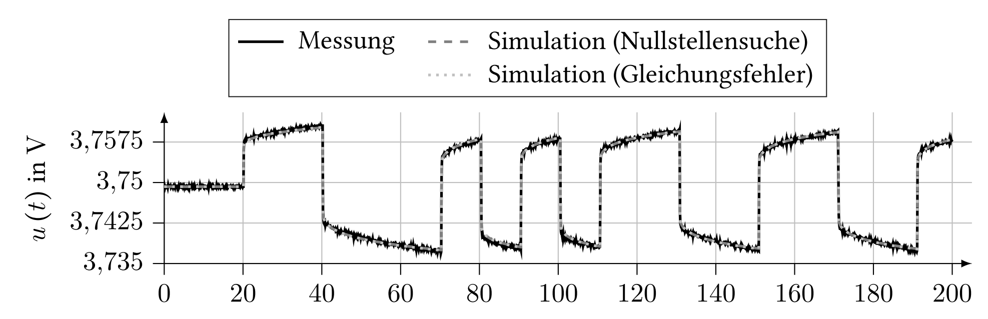


Abbildung 7.6: Vergleich der Messung und den Simulationen der Ausgangsspannung, die sich mit den identifizierten Parametern $\hat{\boldsymbol{p}}$ sowie Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ ergeben

[24] Ein Vergleich mit der Simulation, für die die Referenzparameter verwendet werden, findet im Anhang J statt.

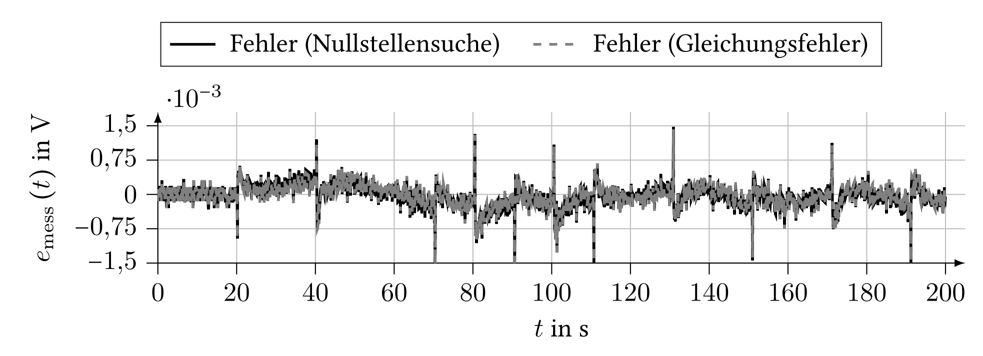


Abbildung 7.7: Resultierenden Fehler zwischen der Messung und den Simulationen der Ausgangsspannung, die sich mit den identifizierten Parametern $\hat{\boldsymbol{p}}$ sowie Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ ergeben

In Bezug auf die praktische Anwendbarkeit ist der Rechenaufwand neben dem Parametrierungsaufwand und der Genauigkeit ein weiterer wichtiger Punkt. Ein Iterationsdurchlauf des zweistufigen Verfahrens mit den im Abschnitt 7.2 gewählten Werten benötigt maximal $\hat{t}_{\text{iter},1} \approx 0{,}89\,\text{s}$ und durchschnittlich $\bar{t}_{\text{iter},1} \approx 0{,}57\,\text{s}$ für das auf dem Modulationsfunktionsverfahren basierende Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.1. Dahingegen dauert ein Durchlauf des zweiten Verfahrens aus dem Abschnitt 6.2.3, dem der Gleichungsfehler zugrunde liegt, maximal $\hat{t}_{\text{iter},1} \approx 0{,}79\,\text{s}$ und durchschnittlich $\bar{t}_{\text{iter},2} \approx 0{,}34\,\text{s}$. Der Hauptrechenaufwand geht für beide Verfahren auf die Berechnung des Ausgangssignals zurück, das an der rekursiven Form der geschlossenen Lösung (5.3) liegt. Das berechnete Ausgangssignal wird bei der Parameteridentifikation zum Aufstellen der Hilfsvariablen (siehe Definition 4.2) und beim Verfahren aus dem Abschnitt 6.2.3 zur Berechnung des Gleichungsfehlers (6.70) benötigt. Mit der in diesem Kapitel gewählten Parametrierung des zweistufigen Verfahrens kann nach dem ersten Identifikationsintervall alle $T_{\triangle} = 4\,\text{s}$ eine neue Gleichung für die Parameteridentifikation erzeugt werden und somit ein erneuter Durchlauf des zweistufigen iterativen Verfahren erfolgen. Dass beide maximalen und durchschnittlichen Rechenzeiten deutlich kleiner als $T_{\triangle}$ sind, weist darauf hin, dass beide Verfahren zumindest für eine kleine Anzahl an Parametern und Ableitungsordnungen echtzeitfähig sind. Die maximale Rechenzeit kann als untere Schranke für das Verschieben der Modulationsfunktion interpretiert werden. Falls $T_{\triangle} < \bar{t}_{\text{iter}}$ gewählt wird, werden mit zunehmender Zeit nicht mehr die aktuellen Messwerte für die Identifikation berücksichtigt.

7.3 Zusammenfassung und Diskussion der Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation

In diesem Kapitel werden die Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation, die im Abschnitt 6.2 hergeleitet werden, zur Identifikation dieser Größen eines LiPO-Batteriezellmodells aus Zeitbereichsmessdaten erfolgreich angewendet. Dafür wird eine LiPO-Batteriezelle bei konstanter Temperatur innerhalb eines Klimaschranks mit einem Stromsignal angeregt und das resultierende Spannungssignal gemessen (siehe Abschnitt 7.1). Neben der Verwendung von verrauschten Messdaten ist besonders hervorzuheben, dass sich

die LiPO-Batteriezelle zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befunden hat. Dies ist bei den bisher in der Literatur bekannten Verfahren eine wesentliche Voraussetzung und zugleich eine starke Einschränkung für die Anwendbarkeit der Verfahren in der Praxis.

Ein wesentlicher Punkt bei beiden Verfahren ist die Parametrierung (siehe Abschnitt 7.2 und Anhang I). So ist die Modulationsfunktion für die Parameteridentifikation stets auf das zu identifizierende System anzupassen. Weitere Parameter, die die Identifikationsgüte beeinflussen, sind die Speicherlänge des SMPs, die Kovarianzmatrix der rekursiven IV-Methode, die Variation der Ableitungsordnung zur Berechnung des Differenzenquotienten sowie die Abtastpunkte bei Verwendung der Methode aus dem Abschnitt 6.2.3, die auf dem Gleichungsfehler basiert. Mit der gewählten Parametrierung weist bei beiden Verfahren die identifizierte Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ die größte relative Abweichung gegenüber dem Referenzwert α auf, wobei dieser in beiden Fällen betragsmäßig kleiner als $2\,\%$ ist (siehe Tabelle 7.1). Bei einem Vergleich der Simulationsergebnisse, die mit den identifizierten Parametern erzielt werden, und der Messung liegt die Abweichung in der Größenordnung des Rauschens. Die einzige Ausnahme bilden sprunghafte Änderungen, die jedoch aufgrund des gewählten Modells nicht abgebildet werden können (siehe Abbildung 7.7)

Im Abschnitt 2.2.2 werden im Stand der Wissenschaft etablierte Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation beschrieben. Mit Bezug auf das Identifikationsszenario besitzen sämtliche Verfahren den Nachteil, dass diese ein zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindliches System voraussetzen. Hinzu kommt, dass auch für die Anwendung der Verfahren bis auf für die optimierungsbasierten Verfahren von einem unverrauschten Ausgangssignal ausgegangen wird. In dem Identifikationsszenario in diesem Kapitel sind diese beiden Anforderungen jedoch nicht erfüllt. Zum einen wird die Identifikation erst $60\,\mathrm{s}$ nach der Anregung gestartet und zum anderen sind die Messgrößen von Rauschen überlagert (siehe Abbildung 7.2 und 7.3). Dadurch ist eine Anwendung der Verfahren aus dem Stand der Wissenschaft im Gegensatz zu den beiden im Abschnitt 6.2 hergeleiteten Verfahren nicht möglich. Durch den Parameter $b_0 = {}^1\!/C_{\mathrm{Diff,ref}}$ besitzt das Modell (7.1) einen direkten Zusammenhang zur differentiellen Kapazität, aus der Rückschlüsse auf den Zustand der Lithium-Ionen-Batteriezelle gezogen werden können [Sch17, S. 150 ff.]. In [Sch17] wird zur Charakterisierung der differentiellen Kapazität das nicht-parametrisches Frequenzbereichsverfahren Distribution Function of Differential Capacity[25] (DDC) vorgeschlagen. Um die DDC anwenden zu können, wird die Impedanz der Lithium-Ionen-Batteriezelle benötigt. Für die Impedanzbestimmung hat sich in der Praxis die EIS etabliert [Mac92], [BM05], [Ill14, S. 24], [Las14], mit der durch sinusförmige Anregung der Lithium-Ionen-Batteriezelle punktweise das Impedanzspektrum aufgenommen wird (siehe Anhang A). Aus diesem Grund sind die Messungen speziell im niederfrequenten Bereich sehr langwierig und eine Messung kann um die $90\,\mathrm{h}$ betragen [Sch17, S. 76 f.]. Zu den genannten Nachteilen der Verfahren, dass sich das System in Ruhe befinden und ein unverrauschtes Ausgangssignal vorliegen muss, kommt hinzu, dass durch die spezielle Anregungsform eine Nutzung der Lithium-Ionen-Batteriezelle während der Messung im Allgemeinen nicht möglich ist. Im Gegensatz dazu kann die differentielle Kapazität mit den in dieser Arbeit hergeleiteten Verfahren aus einer Zeitbereichsmessung bestimmt werden, ohne dabei die Nutzung der Lithium-Ionen-Batteriezelle einzuschränken.

[25] engl. für Verteilungsfunktion der differentiellen Kapazität

8 Zusammenfassung

In den letzten Jahren ist das Marktpotenzial von Batterien unter anderem durch die Forderung nach Elektromobilität, die Entwicklungen im Energiesektor und im Bereich Internet der Dinge stark angewachsen[26] [Bun20]. Dies treibt auch die Batterieforschung voran, wobei speziell Lithium-Ionen-Batteriezellen aufgrund ihrer hohen Energiedichte im Fokus stehen [BMO+16]. Ein Teil der Forschung beschäftigt sich mit dem sicheren und effizienten Betrieb von Lithium-Ionen-Batteriezelle mittels modellbasierter Ansätze [NBJ20]. Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Lithium-Ionen-Batteriezelle haben sich fraktionale Modelle hervorgetan, die durch nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen gekennzeichnet sind. Dieses ist darin begründet, dass sich die Parameter und Ableitungsordnungen in Bezug auf die Lithium-Ionen-Batteriezelle elektrochemisch interpretieren lassen [Ill14, S. 37 ff.]. Da sich die Parameter und Ableitungsordnungen des Batteriemodells in Abhängigkeit der Alterung und des Betriebszustands wie beispielsweise dem SOC oder der Temperatur ändern, müssen diese während der Batterienutzung identifiziert werden. Existierende Ansätze zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation fordern, dass sich das durch das fraktionale Modell beschriebene System zu Beginn der Identifikation in Ruhe befindet. Bezogen auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle bedeutet dies, dass alle auftretenden Diffusionsprozesse abgeklungen sein müssen. Da der Abklingvorgang im Stundenbereich liegen kann [Sch17, S. 133 ff.], ist eine Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen mit den in der Literatur bestehenden Verfahren während der Nutzung nicht mehr gegeben. Bei der Identifikation ist auch zu berücksichtigen, dass die Messsignale in der Regel von äußeren Rauscheinfluss überlagert sind [IM11, S. 7 ff], [Ler16, S. 476 ff.]. Damit fraktionalen Batteriemodelle mit elektrochemisch interpretierbaren Parametern und Ableitungsordnungen in Anwendungen eingesetzt werden können, muss das Identifikationsverfahren die Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Batteriemodells unter den Bedingungen, dass

(a) das System zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe ist und
(b) das Ausgangssignal als verrauschte Messgröße vorliegt,

korrekt bestimmen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Verfahren zur gemeinsamen Identifikation der Parameter und der Ableitungsordnung eines fraktionalen Systems unter Berücksichtigung der formulierten Anforderungen (a) und (b) hergeleitet.

Der erste Beitrag der Arbeit zum Stand der Wissenschaft betrifft die Parameteridentifikation, die auf dem Modulationsfunktionsverfahren [Shi54] aufgebaut wird. Der Vorteil ist, dass die Modulationsfunktion bis auf zwei Eigenschaften frei wählbar ist (siehe Definition 3.11), sodass weitere Eigenschaften für die Modulationsfunktion gefordert werden können. In [WLB+17] wird beispielsweise ein konstanter Offset, der das Ausgangssignal überlagert, mittels einer zusätzlichen Eigenschaft der Modulationsfunktion eliminiert. Die Möglichkeit, zusätzliche

[26] https://de.statista.com/prognosen/400286/herstellung-von-batterien-und-akkus-in-deutschland---umsatzprognose

Eigenschaften für die Modulationsfunktion zu formulieren, wird zur Parameteridentifikation fraktionaler Systeme genutzt, die sich zu Beginn der Identifikation nicht in Ruhe befinden. Um zu berücksichtigen, dass ein fraktionales System nicht in Ruhe ist, müssen die initialisierten Ableitungsoperatoren verwendet werden [LH98]. Dadurch gehen bei der Parameteridentifikation nicht nur das Ein- und Ausgangssignal ab dem Beginn der Identifikation, sondern auch das gesamte Ein- und Ausgangssignal ab der Auslenkung aus der Ruhe ein (siehe Abschnitt 4.1.1). Aus der Herleitung der Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens (4.3) unter Berücksichtigung der initialisierten fraktionalen Ableitungsoperatoren ergibt sich eine Bedingung zur Eliminierung der Initialisierungsfunktion der Ableitungsoperatoren, die als zusätzliche Eigenschaft $(P4)$ für die Modulationsfunktion in Lemma 4.2 formuliert wird. Wenn die Modulationsfunktion die Eigenschaft $(P4)$ besitzt, wird kein vergangenes Ein- und Ausgangssignal, sondern nur das Ein- und Ausgangssignal ab dem Identifikationsbeginn benötigt. Eine solche Modulationsfunktion, die diese zusätzliche Eigenschaft mitbringt, ist die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (siehe Abschnitt 4.1.2). Damit ist ein Verfahren zur Parameteridentifikation unter Berücksichtigung der Anforderung (a) formuliert. Dies Verfahren wird in einem ersten Ansatz auf zeitvariante fraktionale Systeme erweitert, deren Parameter sich als Polynomfunktionen schreiben lassen (siehe Abschnitt 4.2). Für diese Systeme lässt sich eine zur Eigenschaft $(P4)$ vergleichbare Eigenschaft $(P5)$ formulieren, die ebenfalls den Einfluss der Initialisierungsfunktion eliminiert und die von einer in dieser Arbeit vorgeschlagenen gewichteten Spline-Type-Modulationsfunktion erfüllt wird. Um ebenfalls bei verrauschten Ausgangsmessungen eine erwartungstreue Parameteridentifikation zu erhalten und somit auch die Anforderung (b) zu erfüllen, wird anstelle der LS-Methode die IV-Methode im Modulationsfunktionsverfahren eingesetzt (siehe Abschnitt 4.3). Zum Anwenden der IV-Methode müssen Hilfsvariablen aufgestellt werden, die allgemein stark korreliert zu dem Ein- und unverrauschten Ausgangssignal und unkorreliert zum Rauschen sein sollen [IM11, S. 302]. Die im Sinne des Modulationsfunktionsverfahrens definierten Hilfsvariablen (siehe Definition 4.2) erfüllen die Kriterien, sofern wie für in der Systemtheorie üblichen Systemen eine Schätzung des ungestörten Ausgangssignals des Systems vorliegt (siehe Theorem 4.2).

Um eine solche Schätzung des ungestörten Ausgangssignals zu erhalten, wird basierend auf der aktuellen Parameterschätzung eine Simulation des Systems vorgeschlagen [IM11, S. 302 f.]. Die bisherigen Berechnungsvorschriften in der Literatur zur Bestimmung des Ausgangssignals für fraktionale Systeme gehen jedoch von einem System in Ruhe aus [Xue17, S. 113 f.], das im Widerspruch mit der Anforderung (a) steht. Um diese Einschränkung aufzuheben, wird in dieser Arbeit eine geschlossene Lösung basierend auf dem SMP (5.3) beschrieben, die den zweiten zentralen Beitrag der Arbeit markiert (siehe Abschnitt 5.1). Da jedoch nicht die komplette Vergangenheit des Ein- und Ausgangssignals durch das SMP abgebildet wird, stellt das berechnete Ausgangssignal lediglich eine Approximation des Ausgangssignals des fraktionalen Systems dar (siehe Abschnitt 5.2). Falls $\alpha_0 < 1$ gilt, konvergiert das berechnete Ausgangssignal gegen das Ausgangssignal des fraktionalen Systems für $t \to \infty$ (siehe Abschnitt 5.3). Mit der geschlossene Lösung basierend auf dem SMP können die Hilfsvariablen der IV-Methode entsprechend der Definition 4.2 aufgestellt werden, sodass ein Parameteridentifikationsverfahren für fraktionale Systeme unter Berücksichtigung der Anforderungen (a) und (b) hergeleitet und die erste Forschungsfrage beantwortet ist.

Den dritten Beitrag dieser Arbeit stellen die Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation dar, die die zweite Forschungsfrage behandeln. Der erste Ansatz basiert auf der Identifikationsgleichung (4.3), die sich bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahren auf initialisierte fraktionale Modelle ergibt. Dadurch kann die Anforderung (a) für die Ableitungsordnungsidentifikation auch durch eine Modulationsfunktion mit der Eigenschaft $(P4)$ erfüllt werden. Die Identifikationsgleichung (4.3) wird für die Ableitungsordnungsidentifikation als eine nichtlineare Gleichung (6.1) interpretiert, die von den Ableitungsordnungen abhängt (siehe Abschnitt 6.1.1). Für ein unverrauschtes Ausgangssignal wird somit die Identifikation der Ableitungsordnung auf eine mehrdimensionale Nullstellensuche reduziert. In der Arbeit werden zwei Lösungsstrategien zur Bestimmung der Nullstellen der nichtlinearen Gleichung verfolgt. Zum einen werden die Nullstellen mittels dem Newton-Verfahren angenähert (siehe Abschnitt 6.1.2). Zum anderen wird die nichtlineare Gleichung (6.1) durch eine kubische Spline-Funktion approximiert, wodurch die Nullstellen der kubischen Spline-Funktion mit der Cardanischen Lösungsformel analytisch bestimmt werden können (siehe Abschnitt 6.1.4). Um in den beiden Ansätzen die nichtlineare Gleichung (6.1) evaluieren zu können, werden die Parameter des fraktionalen Systems benötigt. Unter der Annahme, dass die Parameter unbekannt sind, müssen diese neben den Ableitungsordnungen ebenfalls identifiziert werden. Beide Ansätze lassen sich für eine gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren aus dem Abschnitt 4.1.1 kombinieren. Da ein unverrauschtes Ausgangssignal angenommen wird, kann die LS-Methode innerhalb des Modulationsfunktionsverfahrens eingesetzt werden. Für die Kombination des Newton-Verfahrens mit dem Modulationsfunktionsverfahren basierend auf der LS-Methode in Blockverarbeitung wird die Konvergenz gezeigt (siehe Abschnitt 6.1.3). Für eine weniger rechenintensive und echtzeitfähige Umsetzung der LS-Methode wird nach [IM11, S. 269] die rekursive LS-Methode betrachtet und ein zweistufiger Ansatz vorgeschlagen. Bei diesem Ansatz wird abwechselnd ein Schritt des Newton-Verfahrens zur Identifikation der Ableitungsordnungen und die rekursive LS-Methode zur Parameteridentifikation in Abhängigkeit der aktuellen Schätzung der Ableitungsordnungen ausgeführt (siehe Abbildung 6.2). Im Abschnitt 6.1.5 wird der Einfluss von Rauschen, das das Ausgangssignal überlagert, auf die Ableitungsordnungsidentifikation untersucht und somit die Anforderung (b) berücksichtigt. Der durch das Rauschen entstehende Fehler bezogen auf die Ableitungsordnungsidentifikation lässt sich durch Verwendung des Modulationsfunktionsverfahrens reduzieren, indem der Identifikationshorizont oder die Funktionswerte der Modulationsfunktion verringert werden.

Im Gegensatz zum Abschnitt 6.1 wird im Abschnitt 6.2 die Anforderung (b) direkt bei der Herleitung der Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation berücksichtigt, die in diesem Fall aus optimierungsbasierten Ansätze resultieren. Für den ersten Ansatz wird ein Gütemaß (6.48) basierend auf der nichtlinearen Gleichung (6.1) formuliert. Die Minimierung und somit die Identifikation der Ableitungsordnungen erfolgt in der Arbeit mit dem Gauß-Newton-Verfahren (siehe Abschnitt 6.2.1). Wie bei den beiden vorherigen Verfahren sind im Allgemeinen die Parameter für die Evaluierung der Gleichungen des Gauß-Newton-Verfahrens nicht bekannt. In diesem Fall wird der Ansatz zur Ableitungsordnungsbestimmung mit der IV-Methode aus dem Abschnitt 4.3 für eine gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation kombiniert und die Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens für die Kombination gezeigt (siehe Theorem 6.3 und Lemma 6.11). Der Grund die IV-Methode anstelle der LS-Methode zu verwenden ist, dass die IV-Methode im Gegensatz zur LS-Methode trotz der verrauschten

Messungen eine erwartungstreue Schätzung der Parameter vornimmt (siehe Abschnitt 4.3). Für eine praktische Umsetzung lässt sich das Gauß-Newton-Verfahren auch mit der rekursiven IV-Methode unter Verwendung des Differenzenquotienten vergleichbar zu den vorherigen Verfahren kombinieren (siehe Abschnitt 6.2.2). Ein zweiter Ansatz zur Ableitungsordnungsidentifikation bei verrauschten Messungen wird durch die geschlossene Lösung basierend auf dem SMP (5.3) ermöglicht. Das Gütemaß wird als Summe über den quadrierten Gleichungsfehler zu verschiedenen Zeitpunkten gebildet. Der Gleichungsfehler ergibt sich aus der Differenz des gemessenen Ausgangssignals des Systems und des Ausgangssignals, das mit der geschlossenen Lösung basierend auf dem SMP berechnet wird. Für diesen Ansatz wird in der Arbeit ebenfalls gezeigt, dass das Gauß-Newton-Verfahren bei einer Kombination mit der IV-Methode aus dem Abschnitt 4.3 konvergiert (siehe Abschnitt 6.2.3). Allerdings verschiebt sich das Optimum des Gütemaßes aufgrund der Vernachlässigung eines Teils der Systemhistorie bei der Berechnung des simulierten Ausgangssignals (siehe Beispiel 6.6). Dadurch entsprechen die Ableitungsordnungen, die das Gütemaß minimieren, nicht den Ableitungsordnungen des Systems. Da die Parameter in Abhängigkeit der Ableitungsordnungen identifiziert werden, lassen sich die Parameter des Systems ebenfalls nicht fehlerfrei bestimmen. Zusammenfassend besitzen die beiden hergeleiteten Verfahren bezüglich der Anforderungen (a) und (b) keine Einschränkungen und können mit dem Modulationsfunktionsverfahren basierend auf der IV-Methode zu einem Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnung kombiniert werden. Diese Kombinationen stellen einen wesentlichen Beitrag zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage dar.

Die praktische Anwendung der beiden optimierungsbasierten Verfahren aus dem Abschnitt 6.2 in Kombination mit dem Modulationsfunktionsverfahren basierend auf der rekursiven IV-Methode aus dem Abschnitt 4.3 bildet den letzten Beitrag der Arbeit. Die Verfahren werden zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation eines fraktionalen Batteriemodells eingesetzt, das eine LiPO-Batteriezelle beschreibt. Da reale Messdaten, die mit Rauschen überlagert sind, verwendet werden, lassen sich die Verfahren bezüglich der Anforderung (b) untersuchen. Außerdem wird zur Überprüfung der Anforderung (a) die Batteriezelle vor dem Identifikationsbeginn angeregt, sodass sich die LiPO-Batteriezelle nicht in Ruhe befindet. Das fraktionale Modell zur Beschreibung der eingesetzten LiPO-Batteriezelle wird aus dem allgemeinen fraktionalen Impedanzmodell (2.26) abgeleitet, in dem explizit die elektrochemisch interpretierbare differentielle Kapazität [Sch17, S. 59 ff.] auftritt. Für das abgeleitete Modell werden anschließend die Referenzparameter ermittelt (siehe Abschnitt 7.1). Beide Verfahren konvergieren gegen die Referenzwerte. Während das auf der nichtlinearen Gleichung (6.1) basierende Verfahren 7 Iterationen benötigt, ist das zweite Verfahren, dem der Gleichungsfehler zugrunde liegt, erst nach 27 Iterationen konvergiert (siehe Abbildung 7.5). Außerdem weist das erste Verfahren sowohl für Parameter als auch für die Ableitungsordnung stets einen kleineren relativen Fehler als das zweite Verfahren auf (siehe Tabelle 7.1). Aus den Identifikationsergebnissen geht hervor, dass beide unter Berücksichtigung der Anforderungen (a) und (b) hergeleiteten Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation eines fraktionalen Batteriemodells einsetzbar sind. Dagegen sind für die im Abschnitt 2.2 präsentierten Verfahren durch die nicht in Ruhe befindliche Lithium-Ionen-Batteriezelle, das eine explizite Berücksichtigung der Initialisierungsfunktion notwendig macht (siehe Abschnitt 4.1), und durch die Verwendung der verrauschten Ausgangsspannung wesentliche Voraussetzungen nicht erfüllt. Die Nichtberücksichtigung sowohl der Initialisierungsfunktion (siehe Abschnitt 4.1) als auch des verrauschten

Ausgangssignals (siehe Abschnitt 4.3) führt bei diesen Verfahren auf fehlerhafte Identifikationsergebnisse. Dadurch ist ein Einsatz der im Abschnitt 2.2 präsentierten im Gegensatz zu den im Abschnitt 6.2 hergeleiteten Verfahren zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation eines fraktionalen Batteriemodells in der praktischen Anwendung nicht geeignet.

Zusammenfassend liefert die Arbeit mit den Erkenntnissen zur Initialisierungsfunktion und der Erweiterung der IV-Methode auf fraktionale Systeme einen theoretischen Beitrag zur fraktionalen Analysis. Zudem eröffnen die hergeleiteten Verfahren die Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen fraktionaler Systeme unter praktischen Bedingungen. Hinsichtlich der Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriezellen können somit fraktionale Batteriemodelle in praktischen Anwendungen eingesetzt werden, deren Parameter und Ableitungsordnungen auch während der Batterienutzung mit diesen Verfahren identifiziert werden können. Da die Parameter der fraktionalen Batteriemodelle elektrochemisch interpretierbar sind, lassen sich durch die Verwendung fraktionaler Batteriemodelle genauere Rückschlüsse auf einzelne Prozesse innerhalb der Batterie als durch phänomenologische Maßzahlen ziehen.

A Elektrochemische Impedanzspektroskopie

Die EIS ist eine Frequenzbereichsmethode zur Bestimmung des Impedanzspektrums eines linearen, kausalen und zeitinvarianten elektrochemischen Systems. Eine Lithium-Ionen-Batteriezelle erfüllt die Voraussetzungen näherungsweise, sofern der Arbeitspunkt im Verlauf einer Messung nicht verlassen wird [Ill14, S. 24]. So darf sich beispielsweise der SOC oder die Batteriezelltemperatur nur geringfügig ändern. Als Anregungssignal dient ein sinusförmiger Eingangsstrom oder -spannung mit der Frequenz f und entsprechend des Anregungssignal erfolgt entweder eine Spannungs- oder Strommessung. Unter der Annahme einer Stromanregung und Spannungsmessung ergibt sich der zur Frequenz f gehörige komplexe Impedanzwert

$$\underline{Z}(f) = \frac{U_{\mathrm{amp}}(f)}{I_{\mathrm{amp}}} e^{j\Delta\varphi(f)} \tag{A.1}$$

mit der gemessenen Spannungsamplitude U_{amp}, der vorgegebenen Stromamplitude I_{amp} sowie der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$. Um das vollständige Impedanzspektrum der Lithium-Ionen-Batteriezelle zu erhalten, sind wiederholte Messungen mit unterschiedlichen Frequenzen notwendig [Ill14, S. 24 f.].

In der Abbildung A.1 ist ein mittels EIS aufgenommenes Impedanzspektrum für einen SOC = 50 % (durchgezogen) und einen SOC = 90 % (gestrichelt) der in der Arbeit eingesetzten LiPO-Batteriezelle dargestellt, deren technische Daten im Anhang G aufgeführt sind. Anzumerken ist, dass wie bei der Darstellung von Impedanzspektren einer Batteriezelle üblich die Ordinate in der Abbildung A.1 umgekehrt wird [Ill14, S. 24]. Bei Frequenzen oberhalb von $f \approx 3{,}2\,\mathrm{kHz}$ ist aus dem Impedanzspektrum zu erkennen, dass sich das untersuchte Gesamtsystem induktiv verhält. Nach [Ill14, S. 131] liegt dies an dem Induktivitätsbelag der verwendeten Kabel. Bei $f \approx 3{,}2\,\mathrm{kHz}$ schneidet der Verlauf des Impedanzspektrums die reelle Achse. Da der Imaginärteil zu Null wird, entspricht das Verhalten bei dieser Frequenz dem Verhalten eines ohmschen Widerstands. Daran anschließend befindet ein Bereich bis $f \approx 0{,}3\,\mathrm{Hz}$ bei SOC $\approx 50\,\%$ beziehungsweise $f \approx 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ bei SOC $\approx 90\,\%$, der mithilfe eines abgeflachten Halbkreis beschrieben werden kann. Diese Form ist charakteristisch für den Ladungstransferprozess [Ill14, S. 110]. Der Bereich unterhalb von $f \approx 0{,}3\,\mathrm{Hz}$ beziehungsweise $f \approx 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ ist der Festkörperdiffusion zuzuordnen und weist kapazitives Verhalten auf [Ill14, S. 70].

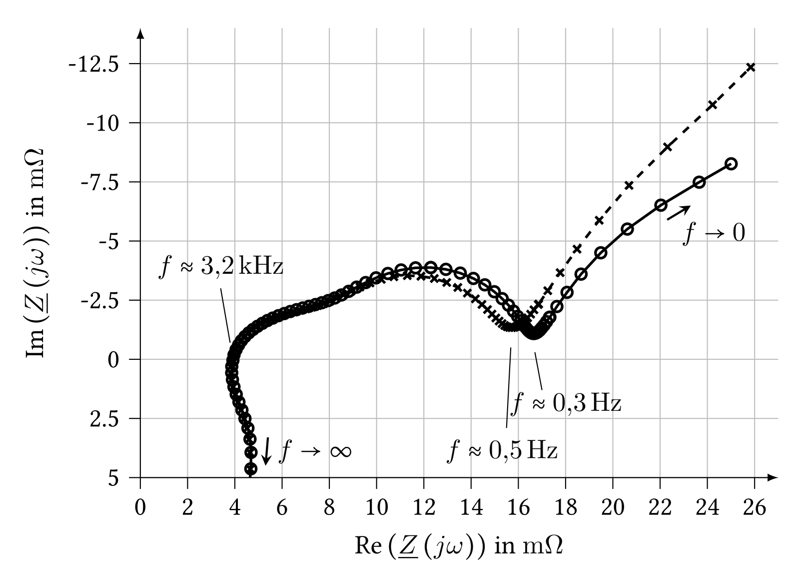


Abbildung A.1: Impedanzspektrum der in dieser Arbeit eingesetzten Lithium-Polymer-Batteriezelle bei einem SOC = 50 % und einem SOC = 90 %

B Initialisierungsfunktionen

Definition B.1 (Initialisierungsfunktionen der fraktionalen Ableitungen nach Riemann-Liouville, Caputo und Grünwald-Letnikov [LH98, S. 21 f.], [LH11], [Kup19, S. 36 f.])

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_0, t_1, t_2, t_3 t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t_1 < t < t_2 \leq t_3$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \leq t_0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ und $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut stetige Funktionen.

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ der linksseitigen Ableitung nach Riemann-Liouville ist [LH98, S. 21 f.,]

$$\psi_{\mathrm{RL}}(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil - \alpha)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil\alpha\rceil} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\xi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha - \lfloor\alpha\rfloor}} \mathrm{d}\tau. \tag{B.1}$$

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ der linksseitigen Ableitung nach Caputo ist [LH11]

$$\psi_{\mathrm{C}}(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil - \alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\lceil\alpha\rceil} \xi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha - \lfloor\alpha\rfloor}} \mathrm{d}\tau. \tag{B.2}$$

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ der linksseitigen Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist [Kup19, S. 36 f.,]

$$\psi_{\mathrm{GL}}(\xi, \alpha, t_0, t_1, t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=\lfloor \frac{t-t_1}{T} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \xi(t - lT). \tag{B.3}$$

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ der rechtsseitigen Ableitung nach Riemann-Liouville ist [LH98, S. 21 f.,]

$$\psi_{\mathrm{RL,rs}}(\xi, \alpha, t_2, t_3, t) = \frac{(-1)^{\lceil\alpha\rceil}}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil - \alpha)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{\lceil\alpha\rceil} \int_{t_2}^{t_3} \frac{\xi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha - \lfloor\alpha\rfloor}} \mathrm{d}\tau. \tag{B.4}$$

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ der rechtsseitigen Ableitung nach Caputo ist [LH11]

$$\psi_{\mathrm{C,rs}}(\xi, \alpha, t_2, t_3, t) = \frac{(-1)^{\lceil\alpha\rceil}}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil - \alpha)} \int_{t_2}^{t_3} \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\lceil\alpha\rceil} \xi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha - \lfloor\alpha\rfloor}} \mathrm{d}\tau. \tag{B.5}$$

Die Initialisierungsfunktion $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *der rechtsseitigen Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist [Kup19, S. 36 f.,]*

$$\psi_{\mathrm{GL,rs}}\left(\xi, \alpha, t_0, t_1, t\right) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=\lfloor \frac{t_2 - t}{T} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t_3 - t}{T} \rfloor} \left(-1\right)^l \binom{\alpha}{l} \xi\left(t + lT\right). \tag{B.6}$$

C Beweise

In diesem Kapitel werden Beweise bereit gestellt, die nicht für das Verständnis in den jeweiligen Abschnitten zwingend erforderlich sind.

C.1 Beweise zu den partiellen Ableitungen des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov

C.1.1 Beweis von Lemma 3.5: Erste partielle Ableitung

Beweis:
Da die Ableitungsordnung α zweimal in der Definition nach Grünwald-Letnikov vorkommt, muss die Produktregel angewendet werden, wodurch sich die allgemeine partielle Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t)}{\partial \alpha} = \lim_{T\to 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t+lT) + \\ \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \frac{\partial}{\partial \alpha} \binom{\alpha}{l} h(t+lT)\end{aligned} \tag{C.1}$$

ergibt. Nach (C.1) müssen die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{T^{\alpha}} \quad \text{und} \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \binom{\alpha}{l} \tag{C.3}$$

für die partielle Ableitung evaluiert werden.

Mit Hilfe der Umformulierung von (C.2) in

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{T^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha \ln(T)} \tag{C.4}$$

folgt direkt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{T^{\alpha}} = \frac{\ln(T)}{T^{\alpha}}. \tag{C.5}$$

Zur Bestimmung der partiellen Ableitung von (C.3) wird als Erstes der Binomialkoeffizient ausmultipliziert

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\binom{\alpha}{l} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(l-2))\cdot(\alpha-(l-1))}{l!}. \tag{C.6}$$

Auf diesen Ausdruck kann ebenfalls die Produktregel angewendet werden

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\binom{\alpha}{l} = \frac{(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(l-1))}{l!} + \ldots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(l-2))}{l!}. \tag{C.7}$$

Jeder Summand wird so erweitert, dass sich wieder ein Binomialkoeffizient ergibt

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\binom{\alpha}{l} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(l-1))}{l!\alpha} + \ldots + \frac{\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-(l-2))\cdot(\alpha-(l-1))}{l!\,(\alpha-(l-1))}. \tag{C.8}$$

Dadurch kann der Binomialkoeffizient ausgeklammert und die für die Erweiterung des Bruchs benötigten Ausdrücke in einer Summe zusammengefasst werden

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\binom{\alpha}{l} = \binom{\alpha}{l}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\alpha-\lambda}. \tag{C.9}$$

Durch das Einsetzen von (C.5) und (C.9) in (C.1) ergibt sich die in (3.37) angegebene erste partielle Ableitung. □

C.1.2 Beweis von Lemma 3.6: Zweite partielle Ableitung

Beweis:
Entsprechend der Berechnung der ersten partiellen Ableitung (3.37) wird auch bei der zweiten partiellen Ableitung die Produktregel angewendet. Die Evaluierung der zu berechnenden Ausdrücke führt dazu, dass neben den aus dem Beweis von Lemma 3.5 bekannten Ausdrücken noch

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\alpha-\lambda} = -\frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} \tag{C.10}$$

ausgewertet werden muss. Die einzelnen Ergebnisse (C.5), (C.9) und (C.10) werden wieder in die allgemeine zweite partielle Ableitung eingesetzt. Abschließend werden gleiche Summanden zusammengefasst. □

C.2 Beweis von Lemma 3.9: Geschlossene Lösung für fraktionale Differentialgleichungen

Beweis:
Das Einsetzen der Definition nach Grünwald-Letnikov ist der erste Schritt im Beweis des Lemmas 3.9

$$\lim_{T\to 0}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor}(-1)^l\binom{\alpha_i}{l}y(t-lT)=\lim_{T\to 0}\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{T^{\beta_k}}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor}(-1)^l\binom{\beta_k}{l}u(t-lT)\,. \tag{C.11}$$

Anschließend wird der Ausdruck für $l = 0$ auf der linken Seite von der restlichen Summe separiert:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to 0}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}y(t)+\lim_{T\to 0}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{T^{\alpha_i}}\sum_{l=1}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor}(-1)^l\binom{\alpha_i}{l}y(t-lT)=\\ \lim_{T\to 0}\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{T^{\beta_k}}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{t-t_0}{T}\rfloor}(-1)^l\binom{\beta_k}{l}u(t-lT)\,.\end{aligned} \tag{C.12}$$

Die Gleichung wird nach $y(t)$ aus der ersten Summe der linken Seite umgestellt, woraus sich die Berechnungsvorschrift für die geschlossene Lösung für FDGLen ergibt. □

C.3 Beweis von Lemma 4.16: Standardabweichungen des Gleichungsfehlers und der Hilfsvariablen

Beweis:
Unter der Annahme, dass die Parameter des fraktionalen Systems sowie das Ein- und Ausgangssignal bekannt sind, hängt der Gleichungsfehler $\boldsymbol{e} = [e_0, \ldots, e_h, \ldots, e_q]^\top$ mit (4.80) nur noch vom Rauschen ab

$$e_h = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \varepsilon(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\alpha_i}\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{C.13}$$

Dieser Ausdruck weist die gleiche Struktur wie die Einträge der Hilfsvariablen (4.84) auf, sodass an dieser Stelle die Kurzform

$$f_h = \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} g(t)\, {}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\theta}\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{C.14}$$

mit $g(t) = y_s(t)$ sowie $g(t) = u(t)$ für (4.84) und mit $g(t) = \varepsilon(t)$ für (C.13) geschrieben werden kann. Die Ableitungsordnung θ steht für alle in der FDGL auftretenden Ableitungsordnungen α_i beziehungsweise β_k. Aufgrund des Integrals wird wie im Abschnitt 4.1.3 eine numerische Approximation für die Analyse angewendet [SKKH18]. Dadurch ergibt sich

$$\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} g(t)\, {}_t\mathrm{d}C^{\theta}_{t_{e,h}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t = T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, g(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} + F_g \tag{C.15}$$

mit der Abtastzeit $T = {(t_{e,h}-t_{a,h})}/{r}$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S} := \{\, s \in \mathbb{N}_0 |\, s \le r\}$, $s \in \mathcal{S}$, $t_s = t_{a,h} + sT$, den Gewichtungen P der Methode zur Integrationsapproximation und dem durch die Approximation resultierenden numerischen Fehler F_g. Die Standardabweichung berechnet sich mit (C.15) zu

$$\begin{aligned}\sigma = \Bigg(\mathrm{E}\Bigg\{\Bigg(& T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, g(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} \mathrm{d}t + F_g - \\ & \mathrm{E}\Bigg\{T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, g(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} \mathrm{d}t + F_g\Bigg\}\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{C.16}$$

Da der Fehlerterm einen festen Wert annimmt, kann dieser aus dem inneren Erwartungswert gezogen werden. Falls die gleiche numerische Integrationsvorschrift verwendet wird, sind die beiden Fehlerterme identisch. In diesem Fall heben sich diese auf. Weiterhin kann der innere Erwartungswert in die Summe gezogen werden. Es wird angenommen, dass die Ableitung der Modulationsfunktion weder mit dem Rauschen noch mit dem Ein- oder Ausgangssignal korreliert. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sigma = \Bigg(\mathrm{E}\Bigg\{\Bigg(& T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, g(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} - \\ & T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, \mathrm{E}\{g(t_s)\}\, \mathrm{E}\Big\{{}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s}\Big\}\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{C.17}$$

Aufgrund der Annahme 3.3 verschwindet der zweite Term, sofern das Rauschen $g(t) = \varepsilon(t)$ analysiert wird. Dieses ist für das Ein- und Ausgangssignal u und y sowie das Simulationssignal y_s im Allgemeinen nicht der Fall.

Zunächst wird die Standardabweichung für das Ein- und Ausgangssignal sowie das Simulationssignal und anschließend für das Rauschen betrachtet. Hierfür soll die Annahme gelten, dass der Erwartungswert aller auftretender Ableitungen der Modulationsfunktion zu Null wird. Dadurch reduziert sich (C.17) zu

$$\sigma = \Bigg(\mathrm{E}\Bigg\{\Bigg(T \sum_{s=0}^{r} P(s)\, g(t_s)\ {}_t\mathrm{d}GL^{\theta}_{t_1} \gamma(t)\Big|_{t=t_s}\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{C.18}$$

Für das Eingangssignal $g(t) = u(t)$ sowie das Simulationssignal des Ausgangs $g(t) = y_s(t)$ entspricht der Ausdruck gerade den Elementen der Hilfsvariablen. Um die Definition der Hilfsvariablen [IM11, S. 302] zu erfüllen, müssen die Elemente von Null verschieden und endlich sein. Daraus folgt, dass die Standardabweichung der Hilfsvariablen σ_w endlich ist. Dieses muss gültig bleiben, falls der Erwartungswert aller auftretender Ableitungen der Modulationsfunktion einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

Für die Analyse der Standardabweichung des Gleichungsfehlers σ_e mit $g(t) = \varepsilon(t)$ wird das Quadrat der Summe ausmultipliziert. Anschließend kann der Erwartungswert wieder in die Summe gezogen werden. Weiterhin wird angenommen, dass das Rauschen und die Modulationsfunktion sowie deren Ableitungen unkorreliert sind. Aufgrund der Korrelationseigenschaft in Annahme 3.3 sind daher Summanden, die von nicht quadratischen Ausdrücken des Rauschens abhängen, Null, wodurch die Standardabweichung in

$$\sigma_e = \left(T^2 \sum_{s=0}^{r} P^2(s) \operatorname{E}\left\{\varepsilon^2(t_s)\right\} \operatorname{E}\left\{\left({}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} \gamma(t)\Big|_{t=t_s} \right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{C.19}$$

resultiert. Wegen (3.48) wird auch die Standardabweichung des Gleichungsfehlers nicht Null und nimmt einen endlichen Wert an. Somit nimmt sowohl die Standardabweichung der Hilfsvariablen σ_w und die Standardabweichung des Gleichungsfehlers σ_e einen von Null verschiedenen, endlichen positiven Wert an. □

C.4 Beweis von Lemma 6.5: Beschränktheit der ersten partiellen Ableitung der Parameter

Beweis:
Da die Beschränktheit für jede partielle Ableitung jedes Parameters gelten muss, wird der Beweis beispielhaft für das h-te Element des Parametervektors $\hat{\boldsymbol{p}}$ und das j-te Element des Ableitungsvektors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ beschrieben. Als erster Schritt wird der Betrag der partiellen Ableitung

$$\left|\frac{\partial \hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| = \left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,:)} \left[\frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{M}^\top \frac{\partial \boldsymbol{z}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} - \frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{M}^\top \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\right]\right| \tag{C.20}$$

gebildet. Dieser wird mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| \leq & \left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,:)} \frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{z}\right| + \left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,:)} \boldsymbol{M}^\top \frac{\partial \boldsymbol{z}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| + \\ & \left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,:)} \frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{p}}\right| + \left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,:)} \boldsymbol{M}^\top \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\hat{\boldsymbol{p}}\right|\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \hat{\boldsymbol{p}}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| \leq & \sum_{\lambda=1}^{N_\theta-1}\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|\sum_{\vartheta=1}^{N_p}\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_{(\lambda,\vartheta)}\right|\left|\{\boldsymbol{z}\}_\vartheta\right| + \\ & \sum_{\lambda=1}^{N_\theta-1}\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|\sum_{\vartheta=1}^{N_p}\left|\left\{\boldsymbol{M}^\top\right\}_{(\lambda,\vartheta)}\right|\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{z}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_\vartheta\right| + \\ & \sum_{\lambda=1}^{N_\theta-1}\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|\sum_{\vartheta=1}^{N_p}\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{M}^\top}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_{(\lambda,\vartheta)}\right|\sum_{\nu=1}^{N_\theta-1}\left|\{\boldsymbol{M}\}_{(\vartheta,\nu)}\right|\left|\{\hat{\boldsymbol{p}}\}_\nu\right| + \\ & \sum_{\lambda=1}^{N_\theta-1}\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|\sum_{\vartheta=1}^{N_p}\left|\left\{\boldsymbol{M}^\top\right\}_{(\lambda,\vartheta)}\right|\sum_{\nu=1}^{N_\theta-1}\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_{(\vartheta,\nu)}\right|\left|\{\hat{\boldsymbol{p}}\}_\nu\right|\end{aligned} \tag{C.22}$$

nach oben abgeschätzt.

Durch die Umformung in (C.22) wird die Untersuchung der Beschränktheit aller partiellen Ableitungen der Parameter auf die Untersuchung der Beschränktheit aller vorkommenden Elemente

(a) $\left|\{\boldsymbol{M}\}_{(h,\lambda)}\right|$,
(b) $\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_{(h,\lambda)}\right|$,
(c) $\left|\{\boldsymbol{z}\}_h\right|$,
(d) $\left|\left\{\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right\}_h\right|$,
(e) $\left|\{\hat{\boldsymbol{p}}\}_j\right|$ und
(f) $\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|$

zurückgeführt.

Die Elemente (a) – (d) beschreiben die modulierten Ein- und Ausgangssignale sowie deren erste partielle Ableitung nach den Ableitungsordnungen. Im Beweis zu dem Theorem 6.1 sind diese Größen ebenfalls untersucht worden. Aus den Überlegungen zu dem Beweis folgt, dass die Elemente (a) – (d) beschränkt sind, wenn die Abtastzeit endlich ist und die Ein- und Ausgangssignale sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind. Im gleichen Beweis werden auch die Parameter untersucht. Diese müssen bei einem beschränkten Ein- und Ausgangssignal auch beschränkt sein, wodurch auch das Element (e) die Beschränktheit erfüllt [Lun20, S.429 ff.].

Folglich muss noch das Element (f), das die einzelnen Einträge der Inversen von $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$ beschreibt, überprüft werden. Damit die Inverse existiert, muss die Matrix $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$ regulär und folglich die Einträge auch beschränkt sein. Dieses folgt direkt aus der Gruppeneigenschaft, dass die Inverse der inversen Matrix wieder die ursprüngliche Matrix $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$ ist [Zei13, S. 585 f.]. Folglich ist es ausreichend die Einträge der Matrix $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}^{\top}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)=\begin{bmatrix} \sum\limits_{h=1}^{N_p}\left(-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right)^2 & \cdots & \sum\limits_{h=1}^{N_p}-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{h=1}^{N_p}-\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t & \cdots & \sum\limits_{h=1}^{N_p}\left(\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right)^2 \end{bmatrix} \tag{C.23}$$

zu untersuchen. Die Einträge der Matrix $\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{M}$ sind Summen über die Anzahl der verwendeten Messungen N_p, wobei die Summanden alle möglichen Produkte zweier Messvektoren ergeben. Die Abschätzung der Einträge mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung nach oben führt auf die Bedingungen (c), (d) und (f) – (h) im Beweis des Theorems 6.1. Aus den Überlegungen zu dem Beweis folgt, dass alle Elemente $\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{M}\right]^{-1}\right\}_{(i,\lambda)}\right|$ beschränkt sind, wenn die Abtastzeit endlich ist und die Ein- und Ausgangssignale sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind. □

C.5 Beweis von Lemma 6.6: Beschränktheit der zweiten partiellen Ableitung der Parameter

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis des Lemmas 6.5 (siehe Anhang C.4). Zusätzlich zu den untersuchten Elementen müssen für die zweite partielle Ableitung noch die Elemente

(a) $\left|\left\{\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa}\right\}_{(h,\lambda)}\right|$ und

(b) $\left|\left\{\frac{\partial^2\boldsymbol{z}}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa}\right\}_{h}\right|$,

auf Beschränktheit überprüft werden. Durch die Abschätzung der Elemente mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergeben sich die gleichen Ausdrücke wie im Beweis des Theorems 6.1. Aus den Überlegungen zum Beweis folgt direkt, dass die Elemente (a) und (b) genau dann beschränkt sind, wenn die Abtastzeit von Null verschieden ist und die Ein- und Ausgangssignale sowie die Modulationsfunktion beschränkt sind. □

C.6 Beweis von Lemma 6.8: Konvergenz der Spline-Funktion gegen die Identifikationsgleichung

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz der kubischen Spline-Funktion ζ gegen die Identifikationsgleichung f (6.1) gezeigt. Nach [FH07, S. 122 ff.] gilt, dass kubische Spline-Funktionen für sehr kleine Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ gegen die im Intervall I zu approximierende Funktion f konvergieren, solange $\|f^{(4)}\|_{\infty,I}$ existiert und endlich ist. Demnach muss für die Konvergenzanalyse die vierte partielle Ableitung der Identifikationsgleichung f auf Beschränktheit untersucht werden. Um die notwendige partielle Ableitung bestimmen zu können, wird jedoch die dritte sowie vierte partielle Ableitung der fraktionalen Ableitung nach der Grünwald-Letnikov-Definition bezüglich der Ableitungsordnung benötigt. Diese sind in den beiden nachfolgenden Lemmata gegeben.

Lemma C.1 (Dritte partielle Ableitung der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov-Definition bezüglich der Ableitungsordnung)
Sei $\alpha, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_1, t \in \mathbb{R}$, $t < t_1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktion. Ferner sei ${}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha}$ der uninitialisierte, rechtsseitige Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov (3.16) *und die Funktion h $\lceil \alpha \rceil$-fache stetig differenzierbar.*
Die dritte partielle Ableitung von (3.16) *nach der Ableitungsordnung α ist*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t)}{\partial \alpha^3} = &-\lim_{T\to 0} \frac{\ln^3(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t+lT) + \\
&\lim_{T\to 0} \frac{3\ln^2(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} h(t+lT) - \\
&\lim_{T\to 0} \frac{3\ln(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} \right)^2 h(t+lT) + \\
&\lim_{T\to 0} \frac{3\ln(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} h(t+lT) - \\
&\lim_{T\to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} h(t+lT) + \\
&\lim_{T\to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} \right)^3 h(t+lT) + \\
&\lim_{T\to 0} \frac{2}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^3} h(t+lT).
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Beweis:
Die dritte partielle Ableitung (C.24) ergibt sich durch Anwenden der Produkt- und Potenzregel auf (3.38) sowie den Ergebnissen (C.5), (C.9) und (C.10). □

Lemma C.2 (Vierte partielle Ableitung der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov-Definition bezüglich der Ableitungsordnung)
Sei $\alpha, T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t_1, t \in \mathbb{R}$, $t < t_1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \geq t_1$ absolut stetige Funktion. Ferner sei ${}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha}$ der uninitialisierte, rechtsseitige Ableitungsoperator nach Grünwald-Letnikov (3.16) *und die Funktion h $\lceil\alpha\rceil$-fache stetig differenzierbar.*
Die vierte partielle Ableitung von (3.16) *nach der Ableitungsordnung α ist*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 {}_t\mathrm{d}GL_{t_1}^{\alpha} h(t)}{\partial \alpha^4} = {} & \lim_{T\to 0} \frac{\ln^4(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{4\ln^3(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} h(t+lT) + \\
& \lim_{T\to 0} \frac{6\ln^2(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda}\right)^2 h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{6\ln^2(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{4\ln(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda}\right)^3 h(t+lT) + \\
& \lim_{T\to 0} \frac{10\ln(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{8\ln(T)}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^3} h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{4}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda}\right)^2 \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2} h(t+lT) + \\
& \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^2}\right)^2 h(t+lT) + \\
& \lim_{T\to 0} \frac{4}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^3} h(t+lT) + \\
& \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \left(\sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{\alpha-\lambda}\right)^4 h(t+lT) - \\
& \lim_{T\to 0} \frac{6}{T^\alpha} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t_1-t}{T} \rfloor} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{(\alpha-\lambda)^4} h(t+lT).
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

Beweis:
Die vierte partielle Ableitung (C.25) ergibt sich durch Anwenden der Produkt- und Potenzregel auf (C.24) sowie den Ergebnissen (C.5), (C.9) und (C.10). □

Mit der ersten bis viertel partiellen Ableitungen (3.37), (3.38), (C.24) und (C.25) von dem Ableitungsoperator entsprechend Grünwald-Letnikov (3.16) nach der Ableitungsordnung α lässt sich die vierte partielle Ableitung der Identifikationsgleichung f bestimmen.

Lemma C.3 (Vierte partielle Ableitung der Identifikationsgleichung)
Sei

$$ {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_n} y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \, {}_{t_1}\mathrm{D}RL_t^{\beta_k} u(t), \tag{C.26} $$

die FDGL, $N = n + m + 2$, $\mathcal{H} := \{h \in \mathbb{N} | h \leq q\}$, $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{J} := \{j \in \mathbb{N} | j \leq N\}$, $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{K} := \{\kappa \in \mathbb{N} | \kappa \leq N\}$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $\mathcal{L} := \{l \in \mathbb{N} | l \leq N\}$, $l \in \mathcal{L}$, $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{N} | \lambda \leq N\}$, $\lambda \in \Lambda$, $t_0, t_{a,h}, t_{e,h} \in \mathbb{R}$, $T_i, T_\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $t_0 < t_1$, $t_{a,h} = t_1 + hT_\Delta$, $t_{e,h} = t_{a,h} + T_i$, γ *eine Modulationsfunktion nach Definition 3.11 mit der Eigenschaft* $(P4)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\hat{\alpha}_n, \ldots, \hat{\beta}_0\right]^\top$ *ein Vektor, der die identifizierten Ableitungsordnungen des fraktionalen Systems zusammenfasst, und* f_h *eine unabhängige Funktion des Nullstellenproblems*

$$ f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m} \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t) \, \mathrm{d}t, \tag{C.27} $$

entsprechend (6.6). *Ferner beschreibt* $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *das* j*-te Element des Ableitungsordnungsvektors* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$*, wobei die Indizierung bei* 1 *beginnt.*
Die vierte partielle Ableitung der Funktion f_h *bezogen auf* $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda$, $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l$, $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ *und* $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ *ist*

$$ \begin{aligned} &\frac{\partial^4 f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda} = \\ &\qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^4 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t) \, \mathrm{d}t - \\ &\qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^4 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda} \int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t) \, \mathrm{d}t + \\ &\qquad \Psi(j,\kappa,l,\lambda) + \Psi(\kappa,l,\lambda,j) + \Psi(l,\lambda,j,\kappa) + \Psi(\lambda,j,\kappa,l) + \\ &\qquad \Omega(j,\kappa,l,\lambda) + \Omega(\kappa,l,\lambda,j) + \Omega(l,\lambda,j,\kappa) + \Omega(\lambda,j,\kappa,l) + \\ &\qquad \Omega(j,l,\kappa,\lambda) + \Omega(\kappa,\lambda,j,l) + \chi(j,\kappa,l,\lambda) + \chi(\kappa,l,\lambda,j) + \\ &\qquad \chi(l,\lambda,j,\kappa) + \chi(\lambda,j,\kappa,l) + \Upsilon(j,\kappa,l,\lambda) \end{aligned} \tag{C.28} $$

mit

$$ \Psi(j,\kappa,l,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda} \displaystyle\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t) \, \frac{\partial \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & j \leq n+1 \\ -\dfrac{\partial^3 \hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda} \displaystyle\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t) \, \frac{\partial \, {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j} \mathrm{d}t & \textit{sonst} \end{cases}, \tag{C.29} $$

$$\Omega(j,\kappa,l,\lambda)=\begin{cases}\frac{\partial^2 \hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda}\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,\frac{\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2}\mathrm{d}t & j\leq n+1 \textit{ und } \kappa=j\\ -\frac{\partial^2 \hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda}\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,\frac{\partial^2\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^2} & j>n+1 \textit{ und } \kappa=j\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases},\tag{C.30}$$

$$\chi(j,\kappa,l,\lambda)=\begin{cases}\frac{\partial \hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda}\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,\frac{\partial^3\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^3}\mathrm{d}t & j\leq n+1 \textit{ und } l=\kappa=j\\ -\frac{\partial \hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda}\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,\frac{\partial^3\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^3} & j>n+1 \textit{ und } l=\kappa=j\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}\tag{C.31}$$

und

$$\Upsilon(j,\kappa,l,\lambda)=\begin{cases}\hat{a}_{n+1-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y(t)\,\frac{\partial^4\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^4}\mathrm{d}t & j\leq n+1 \textit{ und } \lambda=l=\kappa=j\\ -\hat{b}_{N-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u(t)\,\frac{\partial^4\,{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j^4}\mathrm{d}t & j>n+1 \textit{ und } \lambda=l=\kappa=j\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases},\tag{C.32}$$

wobei die partiellen Ableitungen des rechtsseitigen Ableitungsoperators nach Grünwald-Letnikov mit (3.37), (3.38), (C.24) *und* (C.25) *gegeben sind.*

Beweis:
Die vierte partielle Ableitung folgt durch zweifache Anwendung der Produktregel auf (6.14) mit den Hilfsgrößen (6.15) und (6.16), da die Parameter implizit von den Ableitungsordnungen abhängen. □

Mit (C.28) kann der Beweis des Lemmas 6.8 bezüglich der Konvergenz der Spline-Funktion geführt werden.

Beweis des Lemmas 6.8:
Damit die kubische Spline-Funktion ζ gegen die Identifikationsgleichung f (6.1) konvergiert, ist zu zeigen, dass die vierte partielle Ableitung $\frac{\partial^4 f_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_j\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\kappa\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_l\partial\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_\lambda}$ (C.28) beschränkt ist. Dafür wird im ersten Schritt (C.28) mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\frac{\partial^4 f_h\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| = \\
\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\partial^4 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i}\gamma(t)\right|^2 \mathrm{d}t} + \\
\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{\partial^4 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|{}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k}\gamma(t)\right|^2 \mathrm{d}t} + \\
|\Psi(j,\kappa,l,\lambda)| + |\Psi(\kappa,l,\lambda,j)| + |\Psi(l,\lambda,j,\kappa)| + |\Psi(\lambda,j,\kappa,l)| + \\
|\Omega(j,\kappa,l,\lambda)| + |\Omega(\kappa,l,\lambda,j)| + |\Omega(l,\lambda,j,\kappa)| + |\Omega(\lambda,j,\kappa,l)| + \\
|\Omega(j,l,\kappa,\lambda)| + |\Omega(\kappa,\lambda,j,l)| + |\chi(j,\kappa,l,\lambda)| + |\chi(\kappa,l,\lambda,j)| + \\
|\chi(l,\lambda,j,\kappa)| + |\chi(\lambda,j,\kappa,l)| + |\Upsilon(j,\kappa,l,\lambda)| \tag{C.33}$$

mit

$$|\Psi(j,\kappa,l,\lambda)| = \begin{cases} \left|\frac{\partial^3 \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \\ \quad \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}\gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & j \leq n+1 \\ \left|\frac{\partial^3 \hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \\ \quad \sqrt{\int_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\frac{\partial_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}}\gamma(t)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|^2 \mathrm{d}t} & \text{sonst} \end{cases}, \tag{C.34}$$

$$\left|\Omega\left(j,\kappa,l,\lambda\right)\right| = \begin{cases} \dfrac{\left|\dfrac{\partial^2 \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|y\left(t\right)\right|^2 \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\dfrac{\partial^2{}_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma\left(t\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2}\right|^2 \mathrm{d}t}} & j \leq n+1 \text{ und } \kappa = j \\ \dfrac{\left|\dfrac{\partial^2 \hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|u\left(t\right)\right|^2 \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\dfrac{\partial^2{}_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma\left(t\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2}\right|^2 \mathrm{d}t}} & j > n+1 \text{ und } \kappa = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{C.35}$$

$$\left|\chi\left(j,\kappa,l,\lambda\right)\right| = \begin{cases} \dfrac{\left|\dfrac{\partial \hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|y\left(t\right)\right|^2 \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\dfrac{\partial^3{}_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma\left(t\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^3}\right|^2 \mathrm{d}t}} & j \leq n+1 \text{ und } l = \kappa = j \\ \dfrac{\left|\dfrac{\partial \hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda}\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|u\left(t\right)\right|^2 \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left|\dfrac{\partial^3{}_t \mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma\left(t\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^3}\right|^2 \mathrm{d}t}} & j > n+1 \text{ und } l = \kappa = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{C.36}$$

und

$$
|\Upsilon(j,\kappa,l,\lambda)| = \begin{cases} \dfrac{\left|\hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left| \dfrac{\partial^4 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t)}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^4} \right|^2 \mathrm{d}t}} & j \leq n+1 \text{ und } \lambda = l = \kappa = j \\ \dfrac{\left|\hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right| \sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t}}{\sqrt{\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} \left| \dfrac{\partial^4 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t)}{\partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^4} \right|^2 \mathrm{d}t}} & j > n+1 \text{ und } \lambda = l = \kappa = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{C.37}
$$

eine Abschätzung nach oben vorgenommen.

Aus (C.33) – (C.37) können direkt die Bedingungen abgeleitet werden, die für die Konvergenz der kubischen Spline-Funktion gegen die Identifikationsgleichung notwendig sind. Die vierte partielle Ableitung der Identifikationsgleichung ist genau dann beschränkt, wenn

(a) das Eingangssignal u,

(b) das Ausgangssignal y,

(c) die Parameter $\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ und $\hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$,

(d) die erste partielle Ableitung der Parameter nach den Ableitungsordnungen $\partial \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ und $\partial \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$,

(e) die zweite partielle Ableitung der Parameter $\partial^2 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ und $\partial^2 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$,

(f) die dritte partielle Ableitung der Parameter $\partial^3 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ und $\partial^3 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$,

(g) die vierte partielle Ableitung der Parameter $\partial^4 \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$ und $\partial^4 \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\lambda \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_l \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_\kappa$,

(h) die Modulationsfunktion γ,

(i) die Grünwald-Letnikov-Ableitungen der Modulationsfunktion ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_i} \gamma(t)$ und ${}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_k} \gamma(t)$,

(j) die erste partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$ und $\partial {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j$,

(k) die zweite partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial^2 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2$ und $\partial^2 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^2$,

(l) die dritte partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial^3 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^3$ und $\partial^3 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^3$ sowie

(m) die vierte partielle Ableitung der rechtsseitigen Grünwald-Letnikov-Ableitung der Modulationsfunktion $\partial^4 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_{n+1-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^4$ und $\partial^4 {}_t\mathrm{d}GL_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_{N-j}} \gamma(t) / \partial \left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j^4$

beschränkt sind.

Die Annahme 3.4, dass das Ein- und Ausgangssignal stets begrenzt sind, stellt sicher, dass die Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind. Aus dieser folgt auch, dass alle Parameter beschränkt sein müssen und somit die Bedingung (c) erfüllt wird. Ansonsten ist die Unbeschränktheit des Ausgangssignals trotz eines beschränkten Eingangssignal nicht gewährleistet [Lun20, S. 429 ff.]. Wenn die Annahmen 6.3 und 6.4 gültig sind, konvergiert die kubische Spline-Funktion ζ gegen die Identifikationsgleichung f. □

C.7 Beweis von Lemma 6.11: Beschränktheit der ersten partiellen Ableitung der Parameter bei verrauschtem Ausgangssignal

Beweis:
Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Lemmas 6.5 (siehe Anhang C.4). Der Unterschied ist, dass die transponierte Messmatrix durch die transponierte Matrix der Hilfsvariablen ersetzt wird. Dadurch muss

(a) $\left|\left\{\left[\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|$

statt $\left|\left\{\left[\boldsymbol{M}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}\right\}_{(h,\lambda)}\right|$ und zusätzlich noch das Element

(b) $\left|\left\{\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}_{(h,\lambda)}\right|$

überprüft werden.

Die veränderte Inverse in (a) kann auf die gleiche Weise über die Gruppeneigenschaft auf Beschränktheit untersucht werden, sodass es wieder ausreichend ist, alle Elemente der Matrix $\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ einzeln zu überprüfen. Die Matrix $\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ ist

$$\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{h=1}^{N_p} \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t & \dots & \dots & \sum\limits_{h=1}^{N_p} -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y_s\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{h=1}^{N_p} -\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} y\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\alpha}_n}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t \int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t & \dots & \dots & \sum\limits_{h=1}^{N_p} \left(\int\limits_{t_{a,h}}^{t_{e,h}} u\left(t\right){}_t\mathrm{d}C_{t_{e,h}}^{\hat{\beta}_0}\gamma\left(t\right)\mathrm{d}t\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{C.38}$$

Abweichend zum Beweis des Lemmas 6.5 kommt das simulierte Ausgangssignal in dieser Matrix mit vor, sodass die Matrix nur dann beschränkt ist, wenn zu den bisherigen Forderungen der endlichen Abtastzeit und der beschränkten Ein- und Ausgangssignale sowie der beschränkten Modulationsfunktion auch das simulierte Ausgangssignal beschränkt ist. Sofern die Simulation gegen das ursprüngliche Ausgangssignal konvergiert, das für fraktionale Systeme mit $\alpha_0 < 1$ erfolgt (siehe Theorem 5.1), ist auch die Beschränktheit des simulierten Ausgangssignals gegeben.

Das Element (b) beschreibt das modulierte Simulationssignal und taucht als Element auch in der Matrix $\boldsymbol{W}^\top\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{M}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ auf, sodass die gleichen Bedingungen für die Beschränktheit wie zuvor gelten. □

C.8 Hilfsgröße im Beweis zum Theorem 6.4: Konvergenz der iterativen Vorschrift des Optimierungsproblems basierend auf dem Gleichungsfehler

Im Beweis zum Theorem 6.4, in dem die Konvergenz der iterativen Vorschrift des Optimierungsproblems basierend auf dem Gleichungsfehler untersucht wird, wird eine obere Abschätzung der partiellen Ableitung des Gleichungsfehlers (6.76) benötigt. Der Übersicht halber ist die obere Abschätzung, die sich bei Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf (6.76) ergibt, an dieser Stelle angegeben:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial e\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right| = \lim_{T\to 0}&\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{T^{\hat{\alpha}_i}}\left|\frac{\partial \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\left|\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} + \left|\Psi\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right|\right)\left|y_{\mathrm{smp}}\left(t\right)\right| + \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\left|\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}}\cdot \\
&\left[\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{\partial \hat{b}_k\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|\frac{1}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{N-k}}}\sum_{l=0}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{N-k}}{l}\right|\left|u\left(t-lT\right)\right| + \right. \\
&\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\partial \hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\right|\frac{1}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}\left(\sum_{l=1}^{L_1}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l}\right|\left|y_{\mathrm{smp}}\left(t-lT\right)\right| + \right. \\
&\left.\left.\sum_{l=L_1+1}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}{l}\right|\left|\tilde{y}\left(t-lT\right)\right|\right) + \left|\Omega\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right|\right]
\end{aligned}
\tag{C.39}
$$

mit

$$
\left|\Psi\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right| = \begin{cases}\dfrac{\left|\hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|\left|\ln(T)\right|}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\left|\hat{a}_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_{n+1-i}}}} & j \leq n+1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases},
\tag{C.40}
$$

und

$$
\left|\Omega\left(\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j\right)\right| = \begin{cases}
\begin{aligned}&\left|\hat{a}_{n+1-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|\left(\frac{\left|\ln\left(T\right)\right|}{T^{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}}\sum_{l=1}^{L_1}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\left|y_{\mathrm{smp}}\left(t-lT\right)\right| + \right.\\
&\sum_{l=1}^{L_1}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left|\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda\right|}\left|y_{\mathrm{smp}}\left(t-lT\right)\right| + \\
&\frac{\left|\ln\left(T\right)\right|}{T^{\hat{\alpha}_{n+1-j}}}\sum_{l=L_1+1}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\left|\tilde{y}\left(t-lT\right)\right| + \\
&\left.\sum_{l=L_1+1}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left|\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda\right|}\left|\tilde{y}\left(t-lT\right)\right|\right)\end{aligned} & j \leq n+1 \\[2ex]
\begin{aligned}&\left|\hat{b}_{N-j}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|\left(\frac{\left|\ln\left(T\right)\right|}{T^{\hat{\beta}_{N-j}}}\sum_{l=0}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\left|u\left(t-lT\right)\right| + \right.\\
&\left.\sum_{l=0}^{L}\left|\binom{\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j}{l}\right|\sum_{\lambda=0}^{l-1}\frac{1}{\left|\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}_j-\lambda\right|}\left|u\left(t-lT\right)\right|\right)\end{aligned} & \text{sonst}
\end{cases}.
\tag{C.41}
$$

D Polynom-Modulationsfunktion

Der Vorteil der Polynom-Modulationsfunktion liegt darin, dass die fraktionale Ableitungen analytisch in Abhängigkeit der Polynomkoeffizienten berechnet werden kann. Diese Polynomkoeffizienten sind direkt an das vorliegende fraktionale Modell anzupassen.

Definition D.1 (Polynom-Modulationsfunktion [Gao17])
Sei $t_0, t_1, t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $t \in [t_0, t_1]$, α_n *die größte auftretende Ableitungsordnung eines fraktionalen Systems,* $\mathcal{I} := \{ i \in \mathbb{N} | i \leq \lceil \alpha_n \rceil \}$, $\mathcal{K} := \{ k \in \mathbb{N} | k \leq \lceil \alpha_n \rceil - 1 \}$, $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$ *und* $H_i \in \mathbb{R}$.
Die Polynom-Modulationsfunktion ist als

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\lceil \alpha_n \rceil} H_i t^{\lceil \alpha_n \rceil + i} \tag{D.1}$$

mit den Polynomkoeffizienten

$$\sum_{i=0}^{\lceil \alpha_n \rceil} \frac{(\lceil \alpha_n \rceil + i)!}{(\lceil \alpha_n \rceil + i - k)!} H_i t^{\lceil \alpha_n \rceil + i - k} = 0 \tag{D.2}$$

definiert.

Die Polynom-Modulationsfunktion wird im Beispiel 4.2 zum Vergleich eingesetzt, um zu zeigen, dass entweder die Initialisierungsfunktion berücksichtigt werden muss oder die Modulationsfunktion die in dieser Arbeit formulierte Eigenschaft $(P4)$ erfüllen muss.

E Verallgemeinerte Leibniz-Regel für mehrere Faktoren

Die verallgemeinerte Leibniz-Regel stellt eine Rechenvorschrift zur Berechnung der n-ten Ableitung einer Funktion f bereit, die sich als Produkt zweier Funktionen $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ schreiben lässt [Zei13, S. 261]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f_1(x) f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(n-k)}(x) f_2^{(k)}(x). \tag{E.1}$$

Die Erweiterung auf eine Funktion f, die sich nicht als Produkt aus zwei, sondern m Funktionen $f(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_m(x)$ ergibt, ist die verallgemeinerte Leibniz-Regel für mehrere Funktionen [deB05]

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f_1(x) \ldots f_m(x) = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_m=n \\ n_i \in \mathbb{N}}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_m} f_1^{(n_1)}(x) \ldots f_m^{(n_m)}(x) \tag{E.2}$$

mit dem Multinomialkoeffizient [MN07, S. 79]

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \ldots ! n_m!}. \tag{E.3}$$

Die verallgemeinerte Leibniz-Regel für mehrere Funktionen (E.2) soll beispielhaft für eine Funktion f, die sich als Produkt von drei Funktionen $f(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x)$ schreiben lässt, demonstriert werden. Die erste Ableitung ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f_1(x) f_2(x) f_3(x) = f_1^{(1)}(x) f_2(x) f_3(x) + \\ f_1(x) f_2^{(1)}(x) f_3(x) + f_1(x) f_2(x) f_3^{(1)}(x).\end{aligned} \tag{E.4}$$

Die Ableitungsordnungen lassen sich als Ableitungstupel zusammenfassen. Für die einzelnen Summanden folgt $\mathcal{A}_{1,1} = (1, 0, 0)$, $\mathcal{A}_{1,2} = (0, 1, 0)$ und $\mathcal{A}_{1,3} = (0, 0, 1)$, die in der Multimenge $\mathcal{A}_1 = \{\mathcal{A}_{1,1}, \mathcal{A}_{1,2}, \mathcal{A}_{1,3}\}$ zusammengefasst werden. Für die 2-te Ableitung der Funktion f muss jeder Summand aus (E.4) einzeln abgeleitet werden, für die erneut die Produktregel anzuwenden ist. In der Abbildung E.1 sind die sich ergebenden Ableitungstupel dargestellt, die die Multimenge $\mathcal{A}_2$ bilden. Die Anzahl des in der Multimenge $\mathcal{A}_2$ auftretenden Ableitungstupels entspricht dem Vorfaktor in der Ableitung. Beispielsweise kommt das Ableitungstupel $(1, 0, 1)$, der $f_1^{(1)}(x) f_2(x) f_3^{(1)}(x)$ repräsentiert, zweimal in der Multimenge $\mathcal{A}_2$ vor, sodass in der 2-ten Ableitung der Funktion f dieser Ausdruck mit dem Faktor 2 eingeht. Dahingegen geht $f_1^{(2)}(x) f_2(x) f_3(x)$ mit dem Faktor 1 ein. Dieser Vorfaktor wird mittels dem Multinomialkoeffizienten (E.3) in (E.2) berücksichtigt und die Ableitungstupel werden durch den Laufindex in der Summe in (E.2) repräsentiert.

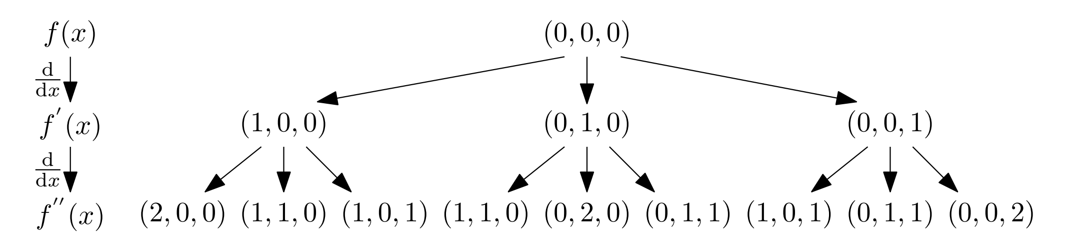


Abbildung E.1: Multimengen für die erste und zweite Ableitung einer Funktion f, die sich als Produkt von drei Funktionen $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x)$ schreiben lässt

F Aufbau des Batteriemessstands

Der Batteriemessstand am IRS besteht aus dem Echtzeitsystem *DS1006 Processor Board* von der Firma dSpace, das mit den beiden A/D-Boards *DS2002 Multi-Channel A/D Board* und *DS2004 High-Speed A/D Board* zur Spannungsmessung sowie dem D/A-Board *DS2102 D/A Board* zur Ansteuerung der Strom-Spannungsquellen betrieben wird. Als Strom-Spannungsquellen stehen insgesamt sechs *Bipolar Power Supply* vom Typ *BOP 20-20M* mit 400 W Ausgangsleistung sowie ein *High Power Bipolar Power Supply* vom Typ *BOP 6-125MG* mit 1000 W Ausgangsleistung der Firma Kepco zur Verfügung. Außerdem sind ein *Agilent 34410A* und zwei *Keysight 34410A* Digitalmultimeter für die Stromerfassung in dem Batteriemessstand integriert. Die Zellen werden während einer Messung im Klimaschrank *VC³ 4018* von Vötsch betrieben. Neben der Möglichkeit, die Temperatur und die Luftfeuchtigkeit vorzugeben, besitzt der Klimaschrank eine CO_2-Löschanlage und ist mit dem CO-Sensor *Polytron 7000* der Firma Dräger gekoppelt. Die Ansteuerung des Klimaschranks und die Programmierung des Echtzeitsystems erfolgt über einen Desktop-Computer, auf dem auch die Visualisierung der Messdaten durchgeführt wird. Die Programmierung des Klimaschranks erfolgt über das vom Hersteller bereitgestellte Programm *S!MPATI®*. Das Echtzeitsystem wird mittels der dSpace-Toolbox in *Matlab* und *Simulink* programmiert. Für die Vorgabe von Strom- oder Spannungswerten sowie für die Visualisierung der Messwerte stellt dSpace das Programm *ControlDesk* bereit.

Die beiden A/D-Boards *DS2002 Multi-Channel A/D Board* und *DS2004 High-Speed A/D Board* besitzen eine 16-bit Auflösung und einen Spannungsmessbereich von ±5 V. Die beiden Boards unterscheiden sich im wesentlichen aufgrund der unterschiedlichen Umwandlungszeiten. Während das *DS2002 Multi-Channel A/D Board* die Daten in 3,9 µs umwandelt, benötigt das *DS2004 High-Speed A/D Board* lediglich 0,8 µs. Ein weiterer Unterschied ist auch die Standardabweichung des Messrauschens der Kanäle. Die Standardabweichungen sind messtechnisch ermittelt worden und betragen für das *DS2002 Multi-Channel A/D Board* über alle Kanäle gemittelt $\bar{\sigma}_{2002} = 0{,}13\,\mathrm{mV}$ und für das *DS2004 High-Speed A/D Board* $\bar{\sigma}_{2004} = 0{,}15\,\mathrm{mV}$. Eine Offsetkorrektur erfolgt softwaretechnisch, sodass die während einer Messung auftretenden Rauschprozesse als mittelwertfrei angenommen werden können.

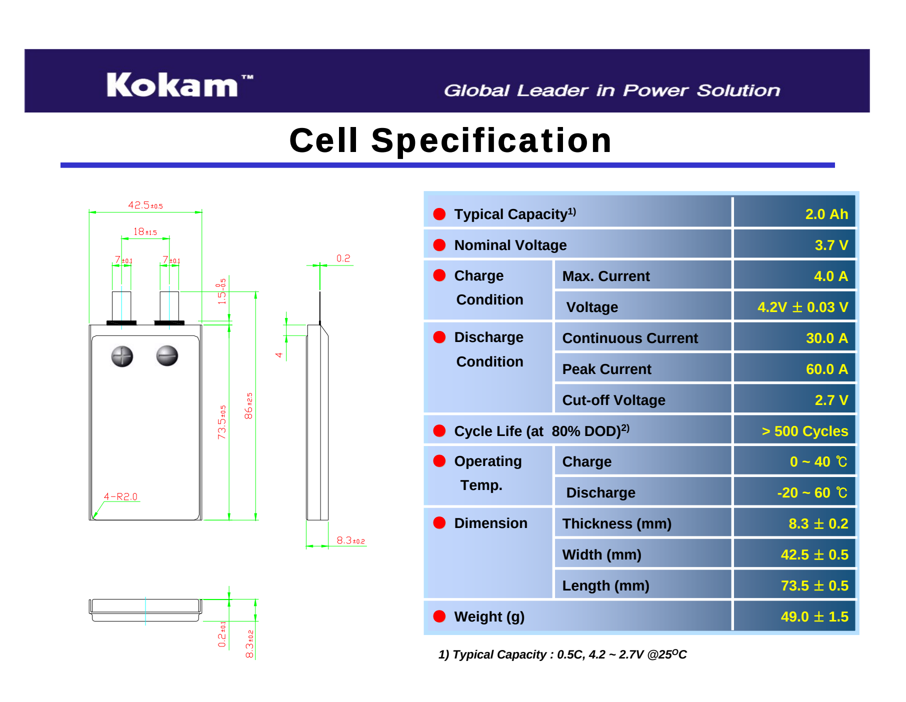
Die Strommessgeräte *Agilent 34410A* und *Keysight 34410A* besitzen die gleichen Spezifikationen. Für die Messungen wird ein Strommessbereich von 1 A verwendet. In dem Datenblatt wird eine Messgenauigkeit von 0,1 % des Messwerts und 0,01 % des Messbereichs für diesen Messbereich angegeben, sodass das Messgerät eine betragsmäßig maximale Messungenauigkeit von 1,1 mA besitzt. Messtechnisch ist eine Standardabweichung von $\sigma_{\mathrm{dm}} = 1{,}6\,\mathrm{mA}$ bestimmt worden.

Die Strom-Spannungsquellen *BOP 20-20M* und *BOP 6-125MG* sind beide als Vierquadrantensteller ausgeführt. Ansonsten weisen die Gerätetypen unterschiedliche Spezifikationen auf. Neben der unterschiedlichen Ausgangsleistung besitzt das *BOP 20-20M* einen maximalen Strombereich von ±20 A und einen Spannungsbereich von ±20 V, während das *BOP 6-125MG* einen maximalen Strombereich von ±125 A und einen Spannungsbereich von ±6 V hat. Zudem variieren

auch die Strom- und Spannungsanstiegszeiten. Beim *BOP 20-20M* betragen beide Anstiegszeiten $35\,\mu s$. Dahingegen besitzt das *BOP 6-125MG* eine Stromanstiegszeit von $1{,}2\,s$ und eine Spannungsanstiegszeit von $250\,\mu s$. Ein weiterer Unterschied ist, dass das *BOP 20-20M* analog und das *BOP 6-125MG* digital angesteuert wird. Zu den unterschiedlichen Spezifikationen kommt hinzu, dass die Strom- und Spannungsmessung des *BOP 20-20M* im Gegensatz zum *BOP 6-125MG* mittels der Messkarten des Echtzeitsystems ausgelesen werden können. Die Strommessung des *BOP 20-20M* weist bei der Vorgabe eines Sollstroms von $0\,A$ über alle Geräte gemittelt eine Standardabweichung von $\bar{\sigma}_{\mathrm{BOP},i} = 2{,}4\,mA$ auf. Die Spannungsmessung besitzt eine Standardabweichung von $\bar{\sigma}_{\mathrm{BOP},u} = 3{,}1\,mV$.

G Zellspezifikation der Kokam Lithium-Polymer-Batteriezelle

Zur Demonstration der in der vorliegenden Arbeit hergeleiteten Verfahren zur Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation fraktionaler Systeme im Kapitel 7 wird eine LiPO-Batteriezelle der Firma Kokam mit der Bezeichnung SLPB 834374H eingesetzt. Dieser Zelltyp besitzt an der Anode Graphit als Aktivmaterial. Das Aktivmaterial an der Kathode ist ein Blend aus Nickel-Cobalt-Aluminium und Cobaltdioxid [Ill14, S. 8]. Die Zellspezifikationen sind dem Datenblatt in der Abbildung G.1 zu entnehmen.



Kokam™ Global Leader in Power Solution

Cell Specification

Item		Value
Typical Capacity[1]		2.0 Ah
Nominal Voltage		3.7 V
Charge Condition	Max. Current	4.0 A
	Voltage	4.2V ± 0.03 V
Discharge Condition	Continuous Current	30.0 A
	Peak Current	60.0 A
	Cut-off Voltage	2.7 V
Cycle Life (at 80% DOD)[2]		> 500 Cycles
Operating Temp.	Charge	0 ~ 40 ℃
	Discharge	-20 ~ 60 ℃
Dimension	Thickness (mm)	8.3 ± 0.2
	Width (mm)	42.5 ± 0.5
	Length (mm)	73.5 ± 0.5
Weight (g)		49.0 ± 1.5

1) Typical Capacity : 0.5C, 4.2 ~ 2.7V @25°C

Abbildung G.1: Datenblatt der in der Arbeit eingesetzten LiPO-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H der Firma Kokam

Aus der SOC-OCV-Kurve kann mit (2.25) die differentielle Kapazität in Abhängigkeit des SOCs für das Kleinsignalverhalten bestimmt werden. Am Batteriemessstand des IRS ist die SOC-OCV-Kurve für die im Kapitel 7 eingesetzte Zelle mit einem Strom von $I = 100\,\mathrm{mA}$ messtechnisch

erfasst worden. Die SOC-OCV-Kurve gibt einen Zusammenhang zwischen dem Lade- sowie Entladestrom und der Zellkapazität an [Ill14, S. 21]. Die gemittelte SOC-OCV-Kurve ist in der Abbildung G.2 dargestellt. Die aus den Messungen mit (2.25) ermittelte differentielle Kapazität C_{Diff} ist in der Abbildung G.3 über den Ladezustand aufgetragen.

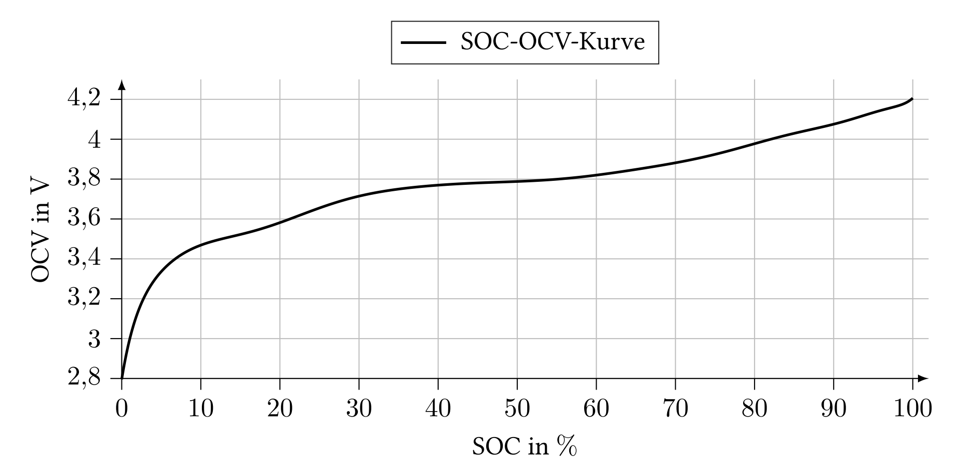


Abbildung G.2: SOC-OCV-Kurve der LiPO-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H der Firma Kokam, die für die praktische Erprobung der Identifikationsmethoden eingesetzt wird

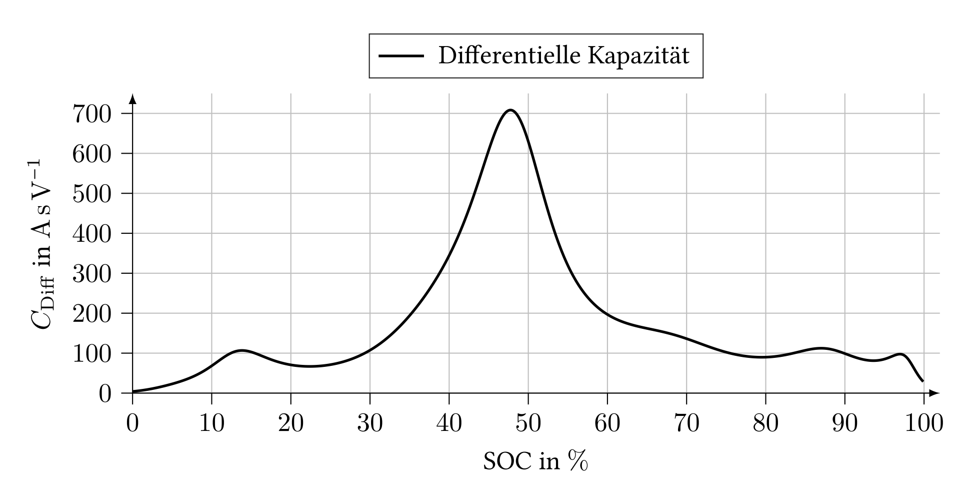


Abbildung G.3: SOC-abhängige differentielle Kapazität der in dieser Arbeit eingesetzten LiPO-Batteriezelle des Zelltyps SLPB 834374H der Firma Kokam

H Anregungs- und Ausgangssignal für die Parameter- und Ableitungsordnungs-identifikation

In diesem Abschnitt sind der Anregungsstrom und die um den OCV korrigierte Ausgangsspannung dargestellt, die für die gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation verwendet werden.

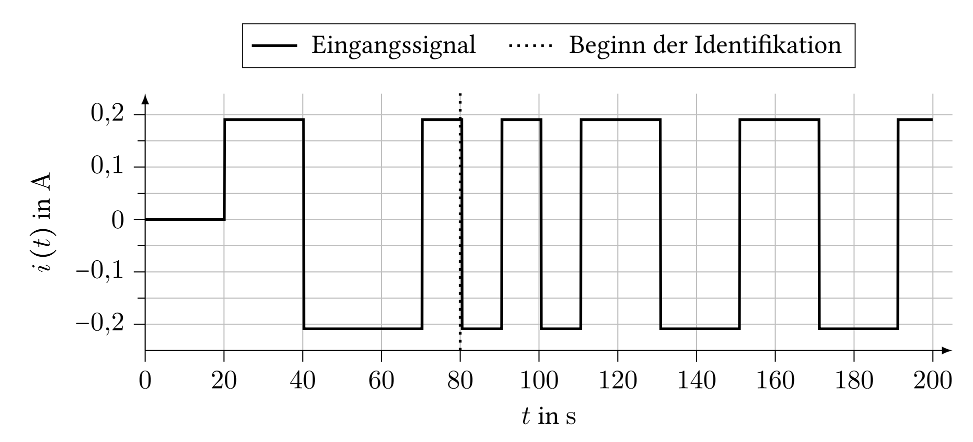


Abbildung H.1: Rauschfreier Anregungsstroms, der das Eingangssignal für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation des LiPO-Batteriezellmodells bildet

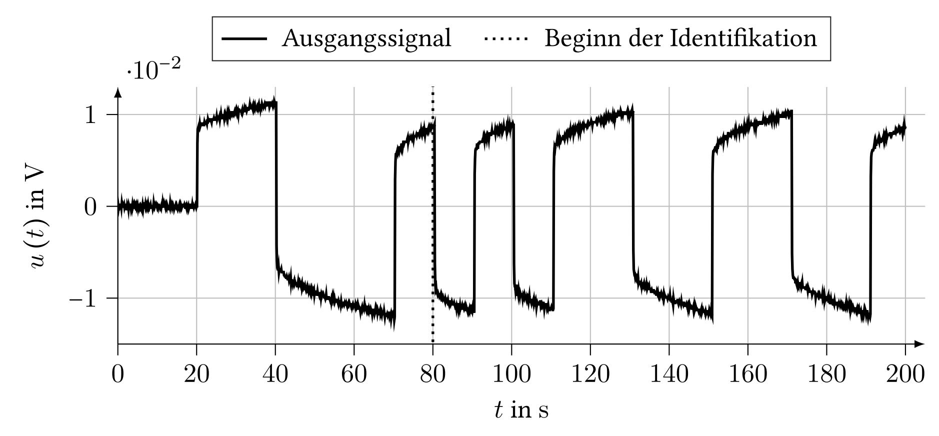


Abbildung H.2: Ausgangsspannung, die um die aktuelle OCV korrigiert ist und die das Ausgangssignal für die Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation des LiPO-Batteriezellmodells darstellt

I Zusammenfassung der Einstellparameter für die praktische Anwendung

In diesem Abschnitt werden sämtliche Einstellparameter, die im Abschnitt 7.2 verwendet werden, tabellarisch aufgeführt. Die Einstellparameter für die rekursive IV-Methode sind in der Tabelle I.1 zusammengefasst.

Tabelle I.1: Einstellparameter für die rekursive Methode der Hilfsvariablen

Größe	**Parameter**
Kovarianzmatrix	$P_0 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$
Speicherlänge	$L = 200$

Für die Parameteridentifikation, die auf dem Modulationsfunktionsverfahren basiert und für das die gewichtete Spline-Type-Modulationsfunktion (4.17) eingesetzt wird, sind die wesentlichen Einstellparameter in der Tabelle I.2 aufgelistet.

Tabelle I.2: Einstellparameter für die Parameteridentifikation

Größe	**Parameter**
Anzahl der Impulse	$s = 10$
Ordnung	$o = 5$
Identifikationshorizont	$T_i = 40\,\mathrm{s}$
Zeit zwischen zwei Identifikationshorizonten	$T_\Delta = 4\,\mathrm{s}$
Abbruchbedingung I	maximal 15 Iterationen
Abbruchbedingung II	maximale Ableitungsordnungsänderung zwischen zwei Iterationen kleiner als $\varepsilon_{\mathrm{para}} = 10^{-6}$

Die Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation, die auf dem Modulationsfunktionsverfahren aufbaut, sind in der Tabelle I.3 aufgeführt und die Einstellparameter für das zweite Verfahren, dem der Gleichungsfehler zugrunde liegt, in der Tabelle I.4.

Tabelle I.3: Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren

Größe	**Parameter**
Startwert	$\hat{\alpha}_{0,0} = 0{,}8$
Anzahl der Impulse	$s = 10$
Ordnung	$o = 5$
Identifikationshorizont	$T_i = 40\,\mathrm{s}$
Zeit zwischen zwei Identifikationshorizonten	$T_\Delta = 4\,\mathrm{s}$
Variation für Differenzenquotienten	$\Delta = 0{,}001$
Abbruchbedingung I	maximal 15 Iterationen
Abbruchbedingung II	maximale Ableitungsordnungsänderung zwischen zwei Iterationen kleiner als $\varepsilon_{\mathrm{para}} = 10^{-6}$

Tabelle I.4: Einstellparameter für die Ableitungsordnungsidentifikation basierend auf dem Gleichungsfehler

Größe	**Parameter**
Startwert	$\hat{\alpha}_{0,0} = 0{,}8$
Anzahl der Vergleichspunkte	$N = 50$
Abstand zwischen zwei Vergleichspunkten	$T_{\Delta,h} = 2\,\mathrm{s}$
Variation für Differenzenquotienten	$\Delta = 0{,}001$
Abbruchbedingung I	maximal 500 Iterationen
Abbruchbedingung II	maximale Ableitungsordnungsänderung zwischen zwei Iterationen kleiner als $\varepsilon_{\mathrm{para}} = 10^{-6}$

J Vergleich der Simulationen basierend auf den Referenzparametern und Identifikationsergebnissen

In diesem Abschnitt wird die Simulation der Ausgangsspannung, die mit den Referenzparametern (7.6) – (7.8) erzielt wird, und den Simulationen mit den Identifikationsergebnissen (siehe Abbildung 7.5) verglichen. Das Ergebnis ist in der Abbildung J.1 dargestellt. Dabei fällt auf, dass sich die beiden Verläufe, die sich mit den identifizierten Parametern und der Ableitungsordnung ergeben, nur geringfügig von der Simulation mit den Referenzparametern unterscheiden. In der Abbildung 7.7 ist der resultierende Fehler zwischen der Simulation mit den Referenzparametern u_{ref} und den anderen beiden Simulationen u_{ident} der Ausgangsspannung

$$e_{\mathrm{vgl}}\left(t\right) := u_{\mathrm{ref}}\left(t\right) - u_{\mathrm{ident}}\left(t\right) \tag{J.1}$$

aufgetragen. Aus den Verläufen geht hervor, dass die Simulation mit den Parameter und Ableitungsordnungen, die mit dem Verfahren basierend auf der Nullstellensuche identifiziert wurden, einen geringeren Fehler im Bezug auf die Simulation mit den Referenzparametern aufweist. Dies stimmt mit den Erkenntnissen zu den relativen Fehlern, die in Tabelle 7.1 angegeben sind, überein. Weiterhin ist anzumerken, dass sich die Abweichung der Simulationen mit zunehmender Zeit nach einem Sprung im Eingangssignal aufgrund des kapazitiven Charakters des Modells und der Abweichung in den Modellparametern vergrößert. Allerdings ist selbst die maximale Abweichung um über zwei Zehnerpotenzen kleiner als die Änderung der Ausgangsspannung.

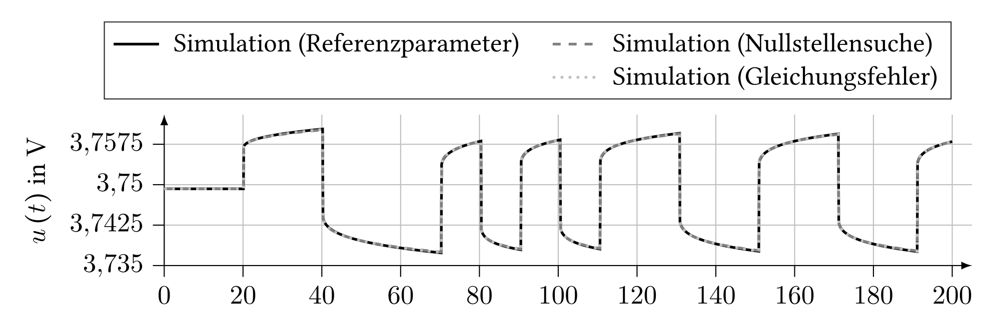


Abbildung J.1: Vergleich der Simulation mit den Referenzparametern und den Simulationen der Ausgangsspannung, die sich mit den identifizierten Parametern $\hat{\boldsymbol{p}}$ sowie Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ ergeben

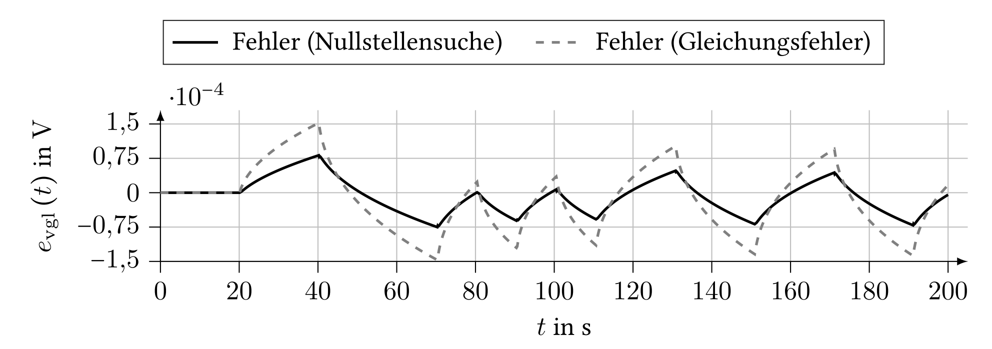


Abbildung J.2: Resultierenden Fehler zwischen der Simulation mit den Referenzparametern und den Simulationen der Ausgangsspannung, die sich mit den identifizierten Parametern $\hat{\boldsymbol{p}}$ sowie Ableitungsordnung $\hat{\alpha}$ ergeben

Literaturverzeichnis

Öffentlich zugängliche Quellen

[ABH+13] Arens, T.; Busam, R.; Hettlich, F.; Karpfinger, C.; Stachel, H.: *Grundwissen Mathematikstudium: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen.* 2013

[ADH+11] Abdullah, A.; Deris, S.; Hashim, S. Z. M.; Mohamad, M. S.; Arjunan, S. N. V.: An Improved Local Best Searching in Particle Swarm Optimization Using Differential Evolution. In: *2011 11th International Conference on Hybrid Intelligent Systems (HIS)*, 2011, S. 115–120

[AGLR19] Aragón, F. J.; Goberna, M. A.; López, M. A.; Rodríguez, M. M.: *Nonlinear Optimization.* Cham: Springer International Publishing, 2019

[Ahm20] Ahmed, S.: Step Response-Based Identification of Fractional Order Time Delay Models. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 39 (2020), S. 3858–3874

[ALL14] Aldoghaither, A.; Laleg-Kirati, T.-M.; Liu, D.-Y.: A Novel Approach for Parameter and Differentiation Order Estimation for a Space Fractional Advection Dispersion Equation. In: *arXiv:1402.2366 [math]* (2014)

[ALL15] Aldoghaither, A.; Liu, D.-Y.; Laleg-Kirati, T.-M.: Modulating Functions Based Algorithm for the Estimation of the Coefficients and Differentiation Order for a Space-Fractional Advection-Dispersion Equation. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* (2015), S. 2813–2839

[AS65] Abramowitz, M.; Stegun, I.: *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, 1965

[BD17] Bertaccini, D.; Durastante, F.: Solving Mixed Classical and Fractional Partial Differential Equations Using Short–Memory Principle and Approximate Inverses. In: *Numerical Algorithms* 74 (2017), S. 1061–1082

[BEH+13] Beck, H.-P.; Engel, B.; Hofmann, L.; Menges, R.; Turek, T.; Weyer, H.: Studie Eignung von Speichertechnologien zum Erhalt der Systemsicherheit / Energie-Forschungszentrum Niedersachsen. Goslar, 2013. – Studie

[BL15] Belkhatir, Z.; Laleg-Kirati, T.: Joint Estimation of the Fractional Differentiation Orders and the Unknown Input for Linear Fractional Non-Commensurate System. In: *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2015, S. 388–393

[BL18] Belkhatir, Z.; Laleg-Kirati, T. M.: Parameters and Fractional Differentiation Orders Estimation for Linear Continuous-Time Non-Commensurate Fractional Order Systems. In: *Systems & Control Letters* 115 (2018), S. 26–33

[BM05] Barsoukov, E. (Hrsg.); Macdonald, J. R. (Hrsg.): *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications.* Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2005

[BMO+16] Bartlett, A.; Marcicki, J.; Onori, S.; Rizzoni, G.; Yang, X. G.; Miller, T.: Electrochemical Model-Based State of Charge and Capacity Estimation for a Composite Electrode Lithium-Ion Battery. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24 (2016), S. 384–399

[Bun20] Bundesministerium für Wirtschaft und Energie: Batterien „made in Germany“ – ein Beitrag zu nachhaltigem Wachstum und klimafreundlicher Mobilität. 2020. – Dossier

[CC41a] Cole, K. S.; Cole, R. H.: Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics* 9 (1941), S. 341

[CC41b] Cole, K. S.; Cole, R. H.: Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics* 10 (1941), S. 98–105

[CKVM03] Chatzakis, J.; Kalaitzakis, K.; Voulgaris, N.; Manias, S.: Designing a New Generalized Battery Management System. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 50 (2003), S. 990–999

[CTM+13] Chetoui, M.; Thomassin, M.; Malti, R.; Aoun, M.; Najar, S.; Abdelkrim, M. N.; Oustaloup, A.: New Consistent Methods for Order and Coefficient Estimation of Continuous-Time Errors-in-Variables Fractional Models. In: *Computers & Mathematics with Applications* 66 (2013), S. 860–872

[CWC+17] Cui, R.; Wei, Y.; Chen, Y.; Cheng, S.; Wang, Y.: An Innovative Parameter Estimation for Fractional-Order Systems in the Presence of Outliers. In: *Nonlinear Dynamics* 89 (2017), S. 453–463

[Das13] Das, S.: Gramian for Control of Fractional Order Multivariate Dynamic System. In: *International Journal of Applied Mathematics and Statistics* 37 (2013), S. 71–96

[DB11] Daniel, C.; Besenhard, J. O.: *Handbook of Battery Materials.* Second. Weinheim: Wiley-Blackwell, 2011

[deB05] de Boor, C.: Divided Differences. In: *Surveys in Approximation Theory* 1 (2005), S. 46–69

[Den07] Deng, W.: Short Memory Principle and a Predictor–Corrector Approach for Fractional Differential Equations. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206 (2007), S. 174–188

[Die10] Diethelm, K.: *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010

[DLMA17] D'Ovidio, M.; Loreti, P.; Momenzadeh, A.; Ahrabi, S. S.: Determination of Order in Linear Fractional Differential Equations. In: *arXiv:1710.01132 [math]* (2017)

[DMTT17] Du, W.; Miao, Q.; Tong, L.; Tang, Y.: Identification of Fractional-Order Systems with Unknown Initial Values and Structure. In: *Physics Letters A* 381 (2017), S. 1943–1949

[dTM14] de Oliveira, E. C.; Tenreiro Machado, J. A.: A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2014 (2014), S. 1–6

[DWHW16] Dai, Y.; Wei, Y.; Hu, Y.; Wang, Y.: Modulating Function-Based Identification for Fractional Order Systems. In: *Neurocomputing* 173 (2016), S. 1959–1966

[Eck17] Eckert, M.: *Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2017

[EKH14] Eckert, M.; Kupper, M.; Hohmann, S.: Functional Fractional Calculus for System Identification of Battery Cells. In: *at – Automatisierungstechnik* 62 (2014), S. 272–281

[FAI18] Fahim, S. M.; Ahmed, S.; Imtiaz, S. A.: Fractional Order Model Identification Using the Sinusoidal Input. In: *ISA Transactions* 83 (2018), S. 35–41

[FH07] Freund, R. W. (Hrsg.); Hoppe, R. H. W. (Hrsg.): *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Tenth. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007

[Fre05] Freger, V.: Diffusion Impedance and Equivalent Circuit of a Multilayer Film. In: *Electrochemistry Communications* 7 (2005), S. 957–961

[Gao17] Gao, Z.: Modulating Function-Based System Identification for a Fractional-Order System with a Time Delay Involving Measurement Noise Using Least-Squares Method. In: *International Journal of Systems Science* 48 (2017), S. 1460–1471

[Geh15] Gehring, N.: *Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für lineare unendlichdimensionale Systeme*, Universität des Saarlandes, Diss., 2015

[GLZ18] Gao, Z.; Lin, X.; Zheng, Y.: System Identification with Measurement Noise Compensation Based on Polynomial Modulating Function for Fractional-Order Systems with a Known Time-Delay. In: *ISA Transactions* 79 (2018), S. 62–72

[Has08] Haschka, M. S.: *Online-Identifikation fraktionaler Impedanzmodelle für die Hochtemperaturbrennstoffzelle SOFC*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2008

[HL03] Hartley, T. T.; Lorenzo, C. F.: Fractional-Order System Identification Based on Continuous Order-Distributions. In: *Signal Processing* 83 (2003), S. 2287–2300

[HLL+18] Hu, M.; Li, Y.; Li, S.; Fu, C.; Qin, D.; Li, Z.: Lithium-Ion Battery Modeling and Parameter Identification Based on Fractional Theory. In: *Energy* 165 (2018), S. 153–163

[Ill14] Illig, J.: *Physically Based Impedance Modelling of Lithium-Ion Cells*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2014

[IM11] Isermann, R.; Münchhof, M.: *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011

[JJ09] Jauberteau, F.; Jauberteau, J. L.: Numerical Differentiation with Noisy Signal. In: *Applied Mathematics and Computation* 215 (2009), S. 2283–2297

[Jos06] Jossen, A.: Fundamentals of Battery Dynamics. In: *Journal of Power Sources* 154 (2006), S. 530–538

[JW95] Jacobsen, T.; West, K.: Diffusion Impedance in Planar, Cylindrical and Spherical Symmetry. In: *Electrochimica Acta* 40 (1995), S. 255–262

[JW06] Jossen, A.; Weydanz, W.: *Moderne Akkumulatoren richtig einsetzen.* First. Neusäß: Reichardt Verlag, 2006

[Kel95] Kelley, C.: *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995

[KJTM15] Khadhraoui, A.; Jelassi, K.; Trigeassou, J.-C.; Melchior, P.: Identification of Fractional Model by Least-Squares Method and Instrumental Variable. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 10 (2015), S. 050801–01 – 050801–10

[KMRM12] Khemane, F.; Malti, R.; Raïssi, T.; Moreau, X.: Robust Estimation of Fractional Models in the Frequency Domain Using Set Membership Methods. In: *Signal Processing* 92 (2012), S. 1591–1601

[Kor13] Korthauer, R. (Hrsg.): *Handbuch Lithium-Ionen-Batterien.* Berlin Heidelberg: Springer Vieweg, 2013

[KST06] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Bd. 204. 1st ed. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 2006

[Kup19] Kupper, M.: *Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2019

[Las14] Lasia, A.: *Electrochemical Impedance Spectroscopy and Its Applications.* New York: Springer-Verlag, 2014

[LB11] Liu, F.; Burrage, K.: Novel Techniques in Parameter Estimation for Fractional Dynamical Models Arising from Biological Systems. In: *Computers & Mathematics with Applications* 62 (2011), S. 822–833

[Ler16] Lerch, R.; Lerch, R. (Hrsg.): *Elektrische Messtechnik.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2016

[LH98] Lorenzo, C. F.; Hartley, T. T.: Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized (Fractional) Calculus. In: *Critical Reviews in Biomedical Engineering* 35 (1998), S. 447–553

[LH00] LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T.: Initialized Fractional Calculus / NASA Glenn Research Center. Cleveland, 2000. – Forschungsbericht

[LH08] LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T.: Initialization of Fractional-Order Operators and Fractional Differential Equations. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 3 (2008), S. 021101–1 – 021101–9

[LH11] LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T.: Time-Varying Initialization and Laplace Transform of the Caputo Derivative: With Order between Zero and One. In: *Volume 3: 2011 ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications, Parts A and B.* Washington, DC, USA: ASMEDC, 2011, S. 163–168

[Lju99] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User.* New Jersey: Prentice Hall, 1999

[LLGP13] LIU, D.-Y.; LALEG-KIRATI, T.; GIBARU, O.; PERRUQUETTI, W.: Identification of Fractional Order Systems Using Modulating Functions Method. In: *American Control Conference (ACC)*, 2013, S. 1679–1684

[LSF+16] LAVIGNE, L.; SABATIER, J.; FRANCISCO, J. M.; GUILLEMARD, F.; NOURY, A.: Lithium-Ion Open Circuit Voltage (OCV) Curve Modelling and Its Ageing Adjustment. In: *Journal of Power Sources* 324 (2016), S. 694–703

[LTZW20] LU, Y.; TANG, Y.; ZHANG, X.; WANG, S.: Parameter Identification of Fractional Order Systems with Nonzero Initial Conditions Based on Block Pulse Functions. In: *Measurement* 158 (107684) (2020), S. 1–9

[Lun20] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.* 2020

[LZT20] LU, Y.; ZHANG, J.; TANG, Y. G.: Parameter Identification of Fractional Order Systems Using a Collocation Method Based on Hybrid Functions. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 142 (2020)

[Mac92] MACDONALD, J. R.: Impedance Spectroscopy. In: *Annals of Biomedical Engineering* 20 (1992), S. 289–305

[Mal78] MALETINSKY, V.: *"l-i-P" Identifikation kontinuierlicher dynamischer Prozesse*, ETH Zurich, Diss., 1978

[MCV+10] MONJE, C. A.; CHEN, Y.; VINAGRE, B. M.; XUE, D.; FELIU-BATLLE, V.: *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications.* London: Springer-Verlag, 2010

[Mik57] MIKUSIŃSKI, J.: *Operatorenrechnung.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957

[MN07] MATOUŠEK, J. (Hrsg.); NEŠETŘIL, J. (Hrsg.): *Diskrete Mathematik.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2007

[MVO08] Malti, R.; Victor, S.; Oustaloup, A.: Advances in System Identification Using Fractional Models. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 3 (2008), S. 021401–1 – 021401–7

[NBJ20] Noura, N.; Boulon, L.; Jemeï, S.: A Review of Battery State of Health Estimation Methods: Hybrid Electric Vehicle Challenges. In: *World Electric Vehicle Journal* 11 (2020), S. 66

[NEHGP18] Nasser Eddine, A.; Huard, B.; Gabano, J.-D.; Poinot, T.: Initialization of a Fractional Order Identification Algorithm Applied for Lithium-Ion Battery Modeling in Time Domain. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59 (2018), S. 375–386

[OAZM21] Ospina Agudelo, B.; Zamboni, W.; Monmasson, E.: A Comparison of Time-Domain Implementation Methods for Fractional-Order Battery Impedance Models. In: *Energies* 14 (2021), S. 4415

[OS06] Oldham, K. B.; Spanier, J.: *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order.* Mineola, N.Y: Dover Publications Inc., 2006

[PAT13] Pooseh, S.; Almeida, R.; Torres, D. F. M.: Discrete Direct Methods in the Fractional Calculus of Variations. In: *Computers & Mathematics with Applications* 66 (2013), S. 668–676

[Pod98] Podlubny, I.: *Fractional Differential Equations.* Cambridge: Academic Press, 1998

[PR93a] Preisig, H. A.; Rippin, D. W. T.: Theory and Application of the Modulating Function Method—I. Review and Theory of the Method and Theory of the Spline-Type Modulating Functions. In: *Computers & Chemical Engineering* 17 (1993), S. 1–16

[PR93b] Preisig, H. A.; Rippin, D. W. T.: Theory and Application of the Modulating Function Method—II. Algebraic Representation of Maletinsky's Spline-Type Modulating Functions. In: *Computers & Chemical Engineering* 17 (1993), S. 17–28

[RPJ13] Rapaić, M. R.; Pisano, A.; Jeličić, Z. D.: Adaptive Order and Parameter Estimation in Fractional Linear Systems by Approximate Gradient and Least Squares Methods. In: *IFAC Proceedings Volumes* 46 (2013), S. 881–886

[Sab15] Sabatier, J.: Fractional Order Models for Electrochemical Devices. In: *Fractional Dynamics.* Berlin, Boston: Sciendo Migration, 2015, S. 141–160

[SAO+06] Sabatier, J.; Aoun, M.; Oustaloup, A.; Grégoire, G.; Ragot, F.; Roy, P.: Fractional System Identification for Lead Acid Battery State of Charge Estimation. In: *Signal Processing* 86 (2006), S. 2645–2657

[Sch99] Schiff, J. L.: *The Laplace Transform: Theory and Applications.* New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1999

[Sch17] Schönleber, M.: *Verfahren zur Charakterisierung des Niederfrequenzverhaltens von Lithium-Ionen Batterien*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2017

[SD06] Sierociuk, D.; Dzieliński, A.: Fractional Kalman Filter Algorithm for States, Parameters and Order of Fractional System Estimation. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* (2006), S. 129–140

[SGL+18] Sabatier, J.; Guillemard, F.; Lavigne, L.; Noury, A.; Merveillaut, M.; Francico, J. M.: Fractional Models of Lithium-Ion Batteries with Application to State of Charge and Ageing Estimation. In: Madani, K. (Hrsg.); Peaucelle, D. (Hrsg.); Gusikhin, O. (Hrsg.): *Informatics in Control, Automation and Robotics.* Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 55–72

[Shi54] Shinbrot, M.: On the Analysis of Linear and Nonlinear Dynamical Systems from Transient-Response Data / National Advisory Committee for Aeronautics. Moffett Field, 1954. – Forschungsbericht

[SLMO15] Sabatier, J.; Lanusse, P.; Melchior, P.; Oustaloup, A.: *Fractional Order Differentiation and Robust Control Design: CRONE, H-Infinity and Motion Control.* Springer Netherlands, 2015

[SMMO10] Sabatier, J.; Merveillaut, M.; Malti, R.; Oustaloup, A.: How to Impose Physically Coherent Initial Conditions to a Fractional System? In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15 (2010), S. 1318–1326

[Spi06] Spivak, M.: *Calculus.* 3rd ed.,. Houston, Texas: Publish or Perish Inc., 2006

[SR11] Schmid, C.; Roppenecker, G.: Parameteridentifikation für LTI-Systeme mit Hilfe signalmodellgenerierter Modulationsfunktionen. In: *at - Automatisierungstechnik* 59 (2011), S. 521–528

[SZK+14a] Stiaszny, B.; Ziegler, J. C.; Krauss, E. E.; Schmidt, J. P.; Ivers-Tiffée, E.: Electrochemical Characterization and Post-Mortem Analysis of Aged LiMn2O4–Li(Ni0.5Mn0.3Co0.2)O2/Graphite Lithium Ion Batteries. Part I: Cycle Aging. In: *Journal of Power Sources* C (2014), S. 439–450

[SZK+14b] Stiaszny, B.; Ziegler, J. C.; Krauss, E. E.; Zhang, M.; Schmidt, J. P.; Ivers-Tiffée, E.: Electrochemical Characterization and Post-Mortem Analysis of Aged LiMn2O4-NMC/Graphite Lithium Ion Batteries Part II: Calendar Aging. In: *Journal of Power Sources* 258 (2014), S. 61–75

[TLC19] Touil, W.; Ladaci, S.; Chaabi, A.: Real-Time Fractional Order System Identification Using Recursive Least Squares Method. In: *The International Conference on Advanced Engineering in Petrochemical Industry.* Skikda, Algerien, 2019

[TLW+15] Tang, Y.; Liu, H.; Wang, W.; Lian, Q.; Guan, X.: Parameter Identification of Fractional Order Systems Using Block Pulse Functions. In: *Signal Processing* 107 (2015), S. 272–281

[VMGO13] Victor, S.; Malti, R.; Garnier, H.; Oustaloup, A.: Parameter and Differentiation Order Estimation in Fractional Models. In: *Automatica* 49 (2013), S. 926–935

[VT15] Valério, D.; Tejado, I.: Identifying a Non-Commensurable Fractional Transfer Function from a Frequency Response. In: *Signal Processing* 107 (2015), S. 254–264

[WBG17] Whitlinger, J.; Boone, E. L.; Ghanam, R.: A Bayesian Estimation for the Fractional Order of the Differential Equation That Models Transport in Unconventional Hydrocarbon Reservoirs. In: *arXiv:1704.02283 [stat]* (2017)

[WCCW17] Wei, Y.; Chen, Y.; Cheng, S.; Wang, Y.: A Note on Short Memory Principle of Fractional Calculus. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 20 (2017), S. 1382–1404

[WLB+17] Wei, X.; Liu, D.-Y.; Boutat, D.; Liu, H.-R.; Li, Y.-Q.: Modulating Functions-Based Fractional Order Differentiator for Fractional Order Linear Systems with a Biased Output. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), S. 12859–12865

[Xue17] Xue, D.: *Fractional-Order Control Systems, Fundamentals and Numerical Implementations.* Berlin, Boston: De Gruyter, 2017

[YAAC19] Yakoub, Z.; Amairi, M.; Aoun, M.; Chetoui, M.: On the Fractional Closed-Loop Linear Parameter Varying System Identification under Noise Corrupted Scheduling and Output Signal Measurements. In: *Transactions of the Institute of Measurement and Control* (2019), S. 1–13

[YACA15] Yakoub, Z.; Amairi, M.; Chetoui, M.; Aoun, M.: On the Closed-Loop System Identification with Fractional Models. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 34 (2015), S. 3833–3860

[Zei13] Zeidler, E. (Hrsg.): *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler Herausgegeben von E. Zeidler.* Third. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013

[ZTZZ21] Zhang, B.; Tang, Y.; Zhang, X.; Zhang, C.: Parameter Identification of Fractional Order Systems Using a Hybrid of Bernoulli Polynomials and Block Pulse Functions. In: *IEEE Access* 9 (2021), S. 40178–40186

Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

[ENR+18] Eckert, M.; Nagatou-Plum, K.; Rey, F.; Stark, O.; Hohmann, S.: Controllability and Energy-Optimal Control of Time-Variant Fractional Systems. In: *57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* Miami, USA, 2018, S. 4607–4612

[ENR+19] Eckert, M.; Nagatou-Plum, K.; Rey, F.; Stark, O.; Hohmann, S.: Solution of Time-Variant Fractional Differential Equations with a Generalized Peano-Baker Series. In: *IEEE Control Systems Letters* 3 (2019), S. 79–84

[ESSH17] Eckert, M.; Stark, O.; Stojkovic, A.; Hohmann, S.: Fraktionale Zeitbereichsidentifikation einer Lithium-Ionen Zelle mit realen Messdaten. In: *VDI Wissensforum 2017.* Berlin: VDI Verlag, 2017

[KBS+18] Kupper, M.; Brenneisen, J.; Stark, O.; Krebs, S.; Hohmann, S.: Cascaded Fractional Kalman Filtering for State and Current Estimation of Large-Scale Lithium-Ion Battery Packs. In: *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC).* Shenyang, China: IEEE, 2018, S. 5071–5078

[KCS+19] Kupper, M.; Creutz, A.; Stark, O.; Krebs, S.; Hohmann, S.: Current and State of Charge Estimation of Lithium-Ion Battery Packs Using Distributed Fractional Extended Kalman Filters. In: *2019 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA).* Hong Kong, China, 2019, S. 462–469

[SEMH21] Stark, O.; Eckert, M.; Malan, A. J.; Hohmann, S.: Automatic Determination of Modulating Functions. In: *Automatica* (2021) [in Begutachtung; Preprint mit DOI: 10.5445/IR/1000092062 vorhanden]

[SKH20] Stark, O.; Karg, P.; Hohmann, S.: Iterative Method for Online Fractional Order and Parameter Identification. In: *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2020, S. 5159–5166

[SKKH18] Stark, O.; Kupper, M.; Krebs, S.; Hohmann, S.: Online Parameter Identification of a Fractional Order Model. In: *57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* Miami, USA, 2018, S. 2303–2309

[SKKH19a] Stark, O.; Kupper, M.; Krebs, S.; Hohmann, S.: Computation of Orders of a Commensurable Fractional Order Model. In: *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC).* Nice, France, 2019, S. 784–790

[SKKH19b] Stark, O.; Kupper, M.; Krebs, S.; Hohmann, S.: An Extension of the Modulating Function Method for Online Parameter Identification of Initialized Fractional Order Models. In: *2019 International Conference on Fractional Calculus Theory and Applications.* Bourges, France, 2019

[SPH21] Stark, O.; Pfeifer, M.; Hohmann, S.: Parameter and Order Identification of Fractional Systems with Application to a Lithium-Ion Battery. In: *Mathematics* 9 (2021), S. 1607

[SPKH20] Stark, O.; Pfeifer, M.; Krebs, S.; Hohmann, S.: Bias-Free Parameter Identification for Non-Commensurable Fractional Systems. In: *2020 European Control Conference (ECC).* Saint Petersburg, Russia, 2020, S. 1422–1429

[SSH17a] Schwab, S.; Stark, O.; Hohmann, S.: *Examples on Verified Diagnosis of Safety Critical Dynamic Systems Based on Kaucher Interval Arithmetic.* Manchester, England, 2017

[SSH17b] Schwab, S.; Stark, O.; Hohmann, S.: Verified Diagnosis of Safety Critical Dynamic Systems Based on Kaucher Interval Arithmetic. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), S. 12872–12879

[SSH21] Stark, O.; Strehle, F.; Hohmann, S.: Convergence Analysis of the Short-Memory Principle for Fractional Models. In: *2021 European Control Conference (ECC).* Rotterdam, Netherlands, 2021

Betreute studentische Arbeiten

[Amm19] Ammann, M.: *Implementierung eines Signalmodells und Anwendbarkeitsstudie zum Entwurf eines Zustandsreglers zur Parameteridentifikation.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2019

[Ebe18] Eberhard, S.: *Entwicklung von Verfahren zur automatischen Erzeugung eines Grey-Box-Modells für Lithium-Ionen-Batterien.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2018

[Ebe20] Eberhard, S.: *Analyse des Einflusses der Systemhistorie für eine optimierungsbasierte Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2020

[Len18] Lenhardt, D.: *Systematischer Vergleich von Parameteridentifikationsmethoden bei Anwendung des Modulationsfunktionsverfahrens.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2018

[Noh20] Nohr, M.: *Parameterschätzverfahren eines fraktionalen Zeitbereichsmodells für Lithium-Ionen Zellen.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2020

[Rau19] Rausche, L. M.: *Untersuchung numerischer Lösungsverfahren zur Bestimmung einer fraktionalen Ableitungsordnung.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2019

[Wu19] Wu, K.: *Extension of an Optimization Approach for Parameter Identification of a Lithium-Ion Battery Model.* Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2019

Karlsruher Beiträge zur Regelungs- und Steuerungstechnik (ISSN 2511-6312)
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Band 01 Diehm, Gunter
Identifikation des menschlichen Bewegungsverhaltens auf der Basis von Primitiven.
ISBN 978-3-7315-0608-9

Band 02 Flad, Michael
Kooperative Regelungskonzepte auf Basis der Spieltheorie und deren Anwendung auf Fahrerassistenzsysteme.
ISBN 978-3-7315-0610-2

Band 03 Eckert, Marius
Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle.
ISBN 978-3-7315-0690-4

Band 04 Krebs, Stefan
Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine.
ISBN 978-3-7315-0857-1

Band 05 Kaspar, Stephan
Fahrdynamikuntersuchungen eines Elektrofahrzeugs mit Einzelrad-Hinterradantrieb.
ISBN 978-3-7315-0916-5

Band 06 Sauter, Patrick S.
Modellierung und zentrale prädiktive Regelung von multimodalen Energieverteilnetzen.
ISBN 978-3-7315-0963-9

Band 07 Kupper, Martin
Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme.
ISBN 978-3-7315-0971-4

Band 08 Merkert, Lennart
Optimal Scheduling of Combined Heat and Power Generation Considering Heating Grid Dynamics.
ISBN 978-3-7315-1056-7

Die Bände sind unter www.ksp.kit.edu als PDF frei verfügbar oder als Druckausgabe bestellbar.

Band 09 Ludwig, Julian
Automatisierte kooperative Transition einer Regelungsaufgabe zwischen Mensch und Maschine am Beispiel des hochautomatisierten Fahrens.
ISBN 978-3-7315-1069-7

Band 10 Inga Charaja, Juan Jairo
Inverse Dynamic Game Methods for Identification of Cooperative System Behavior.
ISBN 978-3-7315-1080-2

Band 11 Schnurr, Christoph Xaver
Ein Verfahren zur lexikographischen modellprädiktiven Regelung mit der Anwendung auf eine permanenterregte Synchronmaschine.
ISBN 978-3-7315-1095-6

Band 12 Schwab, Stefan
Guaranteed Verification of Dynamic Systems.
ISBN 978-3-7315-0965-3

Band 13 Pfeifer, Martin
Automated Model Generation and Observer Design for Interconnected Systems: A Port-Hamiltonian Approach.
ISBN 978-3-7315-1135-9

Band 14 König, Alexander
Absicherung hochautomatisierten Fahrens durch passiven virtuellen Dauerlauftest
ISBN 978-3-7315-1141-0

Band 15 Stark, Oliver
Parameter- und Ordnungsidentifikation von fraktionalen Systemen mit einer Anwendung auf eine Lithium-Ionen-Batteriezelle
ISBN 978-3-7315-1187-8



15

Für einen sicheren und effizienten Betrieb von Batteriezellen werden zunehmend modellbasierte Methoden eingesetzt. Zur Modellierung der Batteriezellen haben sich fraktionale Modelle, die durch nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen gekennzeichnet sind, als Beschreibungsform etabliert. Zum einen bilden fraktionale Modelle sehr gut das Diffusionsverhalten von Batteriezellen ab. Zum anderen lassen sich die Parameter und Ableitungsordnungen eines fraktionalen Modells elektrochemisch interpretieren und Rückschlüsse auf den Zustand der Batteriezelle ziehen. Um während der Batterienutzung den Zustand der Batteriezelle beurteilen zu können, ist eine fortlaufende Identifikation der Parameter und Ableitungsordnungen des fraktionalen Modells notwendig. In der Arbeit werden Verfahren zur gemeinsamen Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation fraktionaler Systeme präsentiert, die keine Einschränkung bezüglich des Anregungszustands der Batterie zu Beginn der Identifikation treffen und die auch bei verrauschten Ausgangssignal die gesuchten Größen fehlerfrei identifizieren.

Für die Parameteridentifikation wird ein Verfahren basierend auf dem Modulationsfunktionsverfahren hergeleitet. Zur Ableitungsordnungsidentifikation werden zwei optimierungsbasierte Verfahren beschrieben. Das erste Verfahren wird auf dem Parameteridentifikationsverfahren aufgebaut. Dem zweiten Verfahren liegt ein Vergleich des verrauschten Ausgangssignals und eines simulierten Ausgangssignals zugrunde. Eine gemeinsame Parameter- und Ableitungsordnungsidentifikation wird durch die Kombination des Parameteridentifikationsverfahrens mit einem der beiden Verfahren zur Ableitungsordnungsidentifikation erzielt.

ISBN 978-3-7315-1187-8

9 783731 511878 >

Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2511-6312
ISBN 978-3-7315-1187-8